Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Egenverdiene til tridiagonale matriser

Notat TMA4210

Tridiagonale matriser forekommer ofte ved endelige differanser.

Tridiagonale matriser er lette å hanskes med siden det fins effektive numeriske metoder både for løsning av ligningssystem og egenverdiproblem. Vi skal her se på egenverdiproblemet for en generell tridiagonal matrise på formen

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times m}.$$

Vi skal løse egenverdiproblemet

$$Ax = \lambda x,$$

hvor $\lambda \in \mathbf{R}$ og $x = [x_1, \dots, x_m]^T \neq 0$. Vi skriver ut egenverdiproblemet for A og får differenseligningen

$$\begin{aligned} &cx_{j-1} + ax_j + bx_{j+1} = \lambda x_j, \qquad j = 1, \dots, m \\ &x_0 = x_{m+1} = 0 \end{aligned}$$

som er ekvivalent med

$$\begin{aligned} &cx_{j-1} + (a-\lambda)x_j + bx_{j+1} = 0, \qquad j = 1, \dots, m \\ &x_0 = x_{m+1} = 0 \end{aligned}$$

Vi husker fra tidligere øvinger at løsningen av en slik ligning er uttrykt ved nullpunktene til ligningens *karakteristiske* polynom, som i dette tilfellet er

$$p(r) = br^2 + (a-\lambda)r + c.$$

Så anta at nullpunktene til p er gitt ved r_1 og r_2. Da er løsningen av differenseligningen gitt ved

$$x_j = \alpha r_1^j + \beta r_2^j$$

for $j = 0, \dots, m+1$. Vi bestemmer de ukjente koeffisientene ved hjelp av initialbetingelsene:

$$x_0 = \alpha + \beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta = -\alpha,$$

som gir

$$x_j = \alpha(r_1^j - r_2^j), \qquad j = 0, \dots, m+1.$$

Videre har vi at

$$x_{m+1} = \alpha(r_1^{m+1} - r_2^{m+1}) = 0.$$

Siden $x \neq 0$ må $\alpha \neq 0$, så vi får at

$$r_1^{m+1} = r_2^{m+1} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{m+1} = 1.$$

Vi kan eliminere r_2 fra denne ligningen ved identiteten

$$\begin{aligned} r_1 r_2 &= \left(\frac{-(a-\lambda)+\sqrt{(a-\lambda)^2-4bc}}{2b}\right)\left(\frac{-(a-\lambda)-\sqrt{(a-\lambda)^2-4bc}}{2b}\right) \\ &= \frac{(a-\lambda)^2-((a-\lambda)^2-4bc)}{4b^2} \\ &= \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

Vi får dermed

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{m+1} = \left(\frac{r_1^2}{r_2 r_1}\right)^{m+1} = \left(\frac{r_1^2}{\frac{c}{b}}\right)^{m+1} = 1$$

Nå vet vi at røttene til et andregradspolynom generelt er komplekse, så ligningen over kan skrives som

$$\frac{r_1^2}{\frac{c}{b}} = \mathrm{e}^{2\pi i(\frac{s}{m+1})}, \qquad s = 1, \ldots, m.$$

Dermed har vi umiddelbart at de mulige nullpunktene er gitt som

$$\begin{aligned} r_{1,s} &= \sqrt{\frac{c}{b}}\mathrm{e}^{\pi i(\frac{s}{m+1})} \\ r_{2,s} &= \sqrt{\frac{c}{b}}\mathrm{e}^{-\pi i(\frac{s}{m+1})}, \end{aligned}$$

hvor $s = 1, \ldots, m$. For hver $s = 1, \ldots, m$ svarer det dermed en egenverdi λ_s gitt ved ligningen

$$\begin{gathered} r_{1,s} + r_{2,s} = \frac{\lambda_s - a}{b} \\ \Updownarrow \\ \sqrt{\tfrac{c}{b}}(\mathrm{e}^{\pi i(\frac{s}{m+1})} + \mathrm{e}^{-\pi i(\frac{s}{m+1})}) = \frac{\lambda_s - a}{b} \\ \Updownarrow \\ 2\sqrt{\tfrac{c}{b}}\cos(\tfrac{\pi s}{m+1}) = \frac{\lambda_s - a}{b} \\ \Updownarrow \\ \lambda_s = a + 2\sqrt{bc}\cos(\tfrac{\pi s}{m+1}) \end{gathered} .$$

Den tilhørende egenverdien $x_{s,j}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} x_{s,j} &= \alpha(r_{1,s}^j + r_{2,s}^j) \\ &= \alpha\left(\frac{c}{b}\right)^{j/2}(\mathrm{e}^{\pi i(\frac{js}{m+1})} - \mathrm{e}^{-\pi i(\frac{js}{m+1})}) \\ &= 2i\alpha\left(\frac{c}{b}\right)^{j/2}\sin\left(\frac{\pi j s}{m+1}\right), \end{aligned}$$

dvs

$$x_s = \left[\left(\frac{c}{b}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{\pi s}{m+1}\right), \ldots, \left(\frac{c}{b}\right)^{m/2}\sin\left(\frac{\pi m s}{m+1}\right)\right],$$

for $s = 1, \ldots, m$.

EKSEMPEL: Vi skal finne egenverdiene til matrisen

$$A = I + rD,$$

hvor

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}.$$

Sett $\lambda_s(A) = 1 + r\lambda_s(D)$ for $s = 1, \dots, n$, da har vi fra utledningen over at

$$\lambda_s(D) = -2 + 2\cos\left(\frac{\pi s}{n+1}\right) = -4\sin^2\left(\frac{\pi s}{2(n+1)}\right).$$

Dermed får vi at

$$\lambda_s(A) = 1 - 4r\sin^2\left(\frac{\pi s}{2(n+1)}\right)$$

for $s = 1, \dots, n$.