TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2009

Øving 4

Oppgave 1

Gitt en ordinær differensialligning

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad t_0 \le t \le t_{\text{end}}. \tag{1}$$

Du kan anta at f tilfredsstiller Lipschitz-betingelsen

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \le L\|y - \tilde{y}\|.$$

En *én-skrittsmetode* for å løse denne differensialligningen kan beskrives ved

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n; h), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1, \quad h = \frac{t_{\text{end}} - t_0}{N} \tag{2}$$

Anta følgende:

- Den lokale avbruddsfeilen gitt ved

  $$d_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\Phi\big(t_n, y(t_n); h\big)$$

  tilfredsstiller

  $$\|d_{n+1}\| \le Dh^{p+1}$$

  der D er en positiv konstant.

- Funksjonen Φ er Lipschitz-kontinuerlig, med Lipschitz-konstant M, dvs.

  $$\|\Phi(t_n, y; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}; h)\| \le M\|y - \tilde{y}\|. \tag{3}$$

a) Vis at i så fall tilfredsstiller den globale feilen i t_{end}

$$\|e_N\| = \|y(t_{\text{end}}) - y_N\| \le Ch^p,$$

der C er en positiv konstant som avhenger av M, D og intervallet $t_{\text{end}} - t_0$.

b) Anta at en eksplisitt Runge–Kutta-metode i 2 nivåer, gitt ved Butcher-tablået

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & c_2 & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

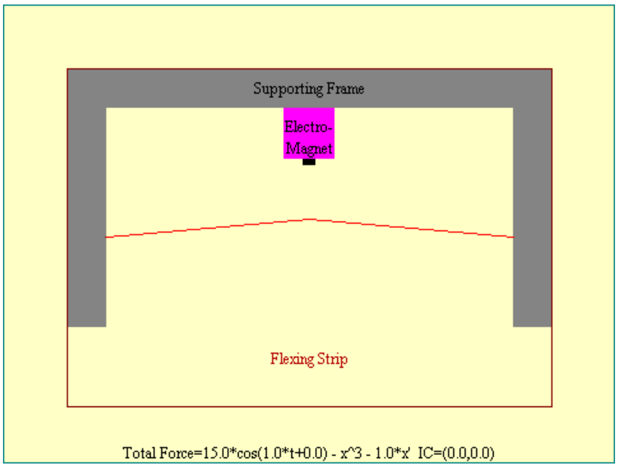
blir brukt til å løse (1). Vis at metoden kan skrives på formen (2). Anta nå at $h \le h_{\max}$ og vis at Φ oppfyller Lipschitz-betingelsen i y, med en Lipschitz-konstant M som avhenger av metodekoeffisientene c_2, b_1 og b_2, og av L og $h_{\max}$.

Oppgave 2

En mye studert matematisk modell er Duffing-oscillatoren. Denne kan beskrives ved startverdiproblemet

$$u'' + ku' - u(1 - u^2) = A\cos(\omega t). \quad (4)$$

G. Duffing brukte i 1918 denne ligningen til å beskrive en tynn, bøyelig metallstav som svinger i nærheten av en elektromagnet. Konstanten k er dempingen, mens ω og A beskriver henholdsvis frekvens og amplitude til pådraget fra elektromagneten. Se `http://www.mcasco.com/pattr1.html` for flere detaljer.



a) Begynn med å skrive om (4) til et system av to førsteordens differensialligninger.

b) Gjør en håndregning (dvs. kalkulator er lov) av ett skritt med forbedret Eulers metode der du setter $k = 0{,}25$, $A = 0{,}4$, $\omega = 1{,}0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, og bruk skrittlengde $h = 0{,}1$.

c) Implementer forbedret Eulers metode i MATLAB og bruk den til å løse (4).

d) Lag plott av første komponent u langs x-aksen og andre komponent u' langs y-aksen (dette kalles et *faseplott*). Begynn med de samme parametrene som i **b)**, men varier etterhvert og se hva som skjer. I dette punktet kan du bruke $h = 0{,}01$. Forsøk å integrere over ganske lang tid.

e) Forsøk å kjøre gjennom med mange forskjellige startverdier, og plott de resulterende integralkurver for å få et bilde av hvordan integralkurvene ser ut. Du kan bruke samme verdier som ovenfor for $k = 0{,}25$, $A = 0{,}4$, $\omega = 1{,}0$.

f) Lag til slutt en implementasjon der du bytter ut forbedret Euler med RK4. Sammenlign resultatene.

Oppgave 3

Sett opp alle trær av orden 5 med tilhørende ordensbetingelser (9 stykker).