Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Syvert P. Nørsett tlf. 73 59 35 45

EKSAMEN I SIF5050 NUM PART ELEM

Bokmål
Lørdag 10. mai 2003
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode B): Enkel kalkulator (HP 30S)
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler er tillatt

Sensurdato: uke 22

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1
Vi skal se på randverdiproblemet

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} = f(x), \quad x \in \Omega = (0,1)$$
$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$$

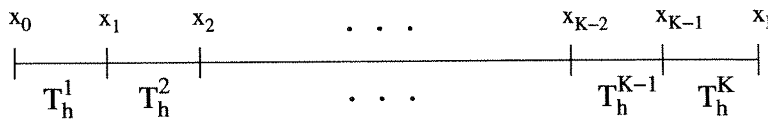
som opptrer i forbindelse bøyning av en fiksert stav av lengde 1.

a) Vis at dette problemet kan gis følgende variasjonsformulering:

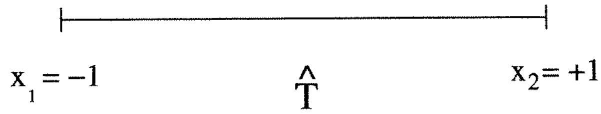
Finn $u \in X$ slik at
$$(u'', v'') = (f, v) \quad \forall v \in X$$
hvor $(w,r) = \int_0^1 w(x)r(x)\,\mathrm{d}x$ og

$$X = \{v \in C^1([0,1]) \,\big|\, v'' \in L^2([0,1]),\ v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}.$$

b) Vi triangulerer Ω med K elementer med uniform lengde $h = 1/K$, som vist i figur 1
La $X_h = \{v \in X \,\big|\, v|_{T_h^k} \in \mathbb{P}_3(T_h^k),\ k = 1, \ldots, K\} \subset X$ og la $\hat{T}$ være referanse-elementet som vist i figur 2. Referanse-elementet har to noder, der hver node har to frihetsgrader som følger av at $X \subset C^1([0,1])$. For den lokale noden x_1 har vi da to basisfunksjoner:



Figur 1: Diskretisert område Ω



Figur 2: Referanse element

$\phi_1(x)$ og $\psi_1(x)$, der $\phi_1(x_1) = 1$ og $\psi_1'(x_1) = 1$. Hvilke andre krav må du sette på $\phi_1(x)$ og $\psi_1(x)$ for entydig å bestemme basisfunksjonene? Vis at $\phi_1(x)$ og $\psi_1(x)$ er henholdsvis gitt som:

(2) $$\phi_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{4}, \qquad -1 \le x \le 1$$

(3) $$\psi_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)^2}{4}, \qquad -1 \le x \le 1$$

Vi ønsker nå å finne $u_h(x) \in X_h$ slik at

$$(u_h'', v'') = (f, v) \quad \forall v \in X_h,$$

der $u_h(x) = \sum_{j=1}^{K-1} u_{hj}\phi_j(x) + \sum_{j=1}^{K-1} u_{hj}'\psi_j(x)$ (Summert over de indre nodene). Gitt at du kjenner $\phi_1(x)$, se (2) og $\psi_1(x)$, se (3), skriv opp utrykkene for $\phi_j(x)$ og $\psi_j(x)$, $j = 1, \ldots, K-1$, og deres definisjonsområder.

c) Formuler en elementmetode basert på X_h og gi det resulterende lineære ligningssystemet.

d) Gitt $f(x, y) \equiv 1$, finn den numeriske løsningen for tilfellet $K = 2$ og sammenlign med eksakt løsning.

Oppgave 2

La Ω være området

$$\Omega = (0,1) \times (0,1).$$

Over Ω har vi gitt differensialligningen

(D) $$-\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

med $u = 0$ på randen til Ω og hvor b og f er tilstrekkelig glatte og $b(x,y) \ge b_0 > 0$ for alle $(x,y) \in \Omega$.

a) Vis at variasjonsformuleringen for dette problemet er:

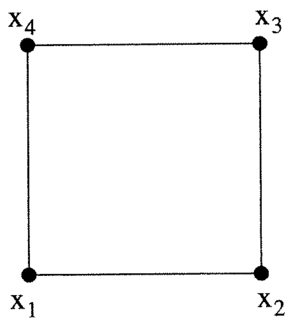
$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \text{Finn } u \in X \text{ slik at} \\ a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in X \end{cases}$$

hvor X er et passende funksjonsrom. Bestem $a(u,v)$ og $l(v)$ og angi X.

Fra nå av vil vi anta at $b(x,y) \equiv 1$ og $f(x,y) \equiv 1$. Vi deler nå opp området Ω ved hjelp av bilineære kvadratiske elementer. Vi tenker oss at antall elementer er det samme i både x- og y-retning, med uniform inndeling. La sidekanten av et vilkårlig element ha lengden h. Totalt er det K elementer. Hvert element har fire noder, én i hvert hjørne. Galerkin-formulering for det diskretiserte problemt er da:

$$\text{(V}_h\text{)} \qquad \begin{cases} \text{Finn } u_h \in X_h \text{ slik at} \\ a(u_h,v) = l(v) \quad \forall v \in X_h \subset X \end{cases}$$

hvor $X_h = \{v \in X \,\big|\, v|_{T_h^k} \in I\!P_1(T_h^k)\; k = 1,\ldots,K\}$ og hvor $I\!P_1 = \text{span}\{1, x, y, xy\}$ er rommet av alle bilineære funksjoner. Nodene i et element er gitt lokale nodenummer som vist i figur 3



Figur 3: Kvadratisk bilineært element

b) Anta at vi velger en nodal basis for $I\!P_1(T_h^k)$. Gi eksplisitt uttrykk for alle basisfunksjonene.

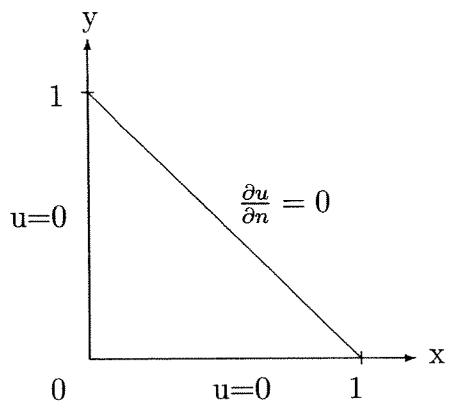
c) Vis at den lokale stivhetsmatrisen $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{4\times4}$ for et vilkårlig element T_h^k er gitt som

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/6 & -1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/6 & 2/3 & -1/6 \\ -1/6 & -1/3 & -1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

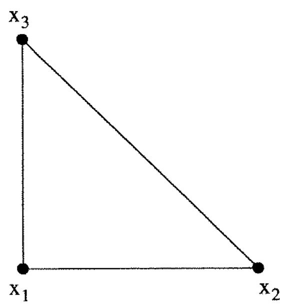
Oppgave 3
I denne oppgaven skal vi se på følgende Poisson-problem

$$\text{(5)} \qquad -\nabla^2 u(x,y) = 1, \quad (x,y) \in \Omega$$

der området Ω og tilhørende randkrav til ligningen (5) er illustrert i følgende figur:

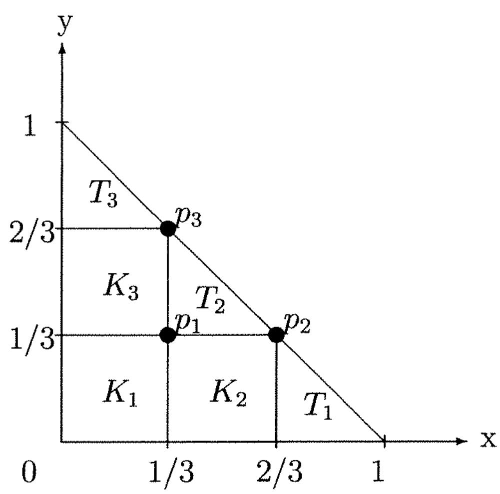


Gi den lokale stivhetsmatrisen for et lineært triangel T_h^k med sidelengde h. Nodene i trekant-elementet er gitt lokale nodenummer som vist i figur 4



Figur 4: Triangulært lineært element

Området Ω deles inn som vist i figuren nedenfor:



På K_1, K_2 og K_3 brukes bilineære funksjoner mens vi på T_1, T_2 og T_3 bruker lineære funksjoner.

De ukjente i p_1, p_2 og p_3 betegnes med u_1, u_2 og u_3. La

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \end{bmatrix}^T.$$

Finn den globale stivhetsmatrisen $\mathbf{A}$ og den globale vektoren $\underline{\mathbf{F}}$ ved å innaddere bidragene fra hvert element. De ukjente skal altså være løsning av

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{F}}.$$

Hint: Du får bruk for stivhetsmatrisen i (4) *fra oppgave 2.*