Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Einar M. Rønquist (73593547)

EKSAMEN I FAG SIF5050
NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER VED HJELP AV ELEMENTMETODEN

Mandag 14. mai 2001
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator tillatt.
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Sensurdato: tirsdag 5. juni

Oppgave 1 Vi har gitt følgende endimensjonale Poisson problem:

$$-u_{xx} = f \quad i \quad \Omega = (0,1) \tag{1}$$
$$u(0) = u(1) = 0 \ . \tag{2}$$

a) Anta at $f(x) = x$. Finn den eksakte løsningen $u(x)$ til Poisson problemet (1)-(2).

b) Gi en svak formulering av problemet (1)-(2).

c) Gi en diskret formulering av problemet (1)-(2) basert på den svake formuleringen.

Anta at vi vil løse (1)-(2) numerisk ved hjelp av elementmetoden. Anta videre at vi velger å bruke $K = 3$ lineære elementer, og at elementlengden h er den samme for alle elementene. Nummerer de globale nodene som x_0, x_1, x_2 og x_3 der $x_i = i\,h$, $i = 0, 1, 2, 3$.

d) Anta at vi bruker en nodal basis for det diskrete løsningsrommet X_h. Illustrer alle basisfunksjonene. Hva er dimensjonen til X_h?

e) Generer det algebraiske ligningssystemet for de ukjente basiskoeffisientene. Bruk en-punkts Gauss-kvadratur for å beregne høyresiden. Finn alle basiskoeffisientene.

f) Sammenlign den numeriske løsningen $u_h(x)$ i nodepunktene med den eksakte løsningen $u(x)$. Forklar resultatene du finner.

Oppgave 2

Betrakt problemet: Finn $u \in X$ slik at

$$a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in X \tag{3}$$

der

$$X = \{v \in H^1((0,1)) \mid v(0) = 0\} \tag{4}$$

$$a(w,v) = \int_0^1 (w_x v_x + w\,v)\,dx \tag{5}$$

$$l(v) = \int_0^1 2\,v\,dx + 3v(1)\ . \tag{6}$$

a) Finn tilsvarende differensialligning og grensebetingelser.

b) Finnes det en tilsvarende minimaliseringsformulering? I så fall, beskriv denne.

c) Vis at løsningen u av (3) er entydig.

d) Formuler et diskret problem basert på elementmetoden.

e) I hvilken forstand er den diskrete løsningen optimal?

Oppgave 3 Betrakt problemet:

$$-u_{xx} = f \quad i \quad \Omega = (0,1) \tag{7}$$

$$u(0) = 0 \tag{8}$$

$$u_x(1) = g\ . \tag{9}$$

Anta at vi vil løse dette problemet numerisk ved hjelp av elementmetoden. Anta videre at vi vil bruke bruke K elementer av orden p. Dette vil si at vi approksimerer løsningen som et polynom av grad p over hvert element.

a) Hvor mange kontinuitetsbetingelser er det på grenseflaten mellom to naboelementer?

b) Hvor stort blir det globale ligningssystemet som funksjon av p og K? Kontroller resultatet ditt for $p = 1$ og $p = 2$.

c) Velg $K = 2$ og en nodal basis. Skisser alle basisfunksjonene når $p = 1$. Skisser alle basisfunksjonene når $p = 2$.

d) Anta at vi vil løse problemet (7)-(9) numerisk for $f = 0$. Anta videre at vi bruker 3 lineære elementer, dvs $K = 3$ og $p = 1$. Hvor stor er feilen $\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)}$ i dette spesielle tilfellet? Forklar svaret ditt.

Det resulterende algebraiske ligningssystemet vil være på formen

$$\underline{A}_h \underline{u}_h = \underline{F}_h \; . \tag{10}$$

Anta at vil løse dette ligningssystemet med konjugerte gradienters metode. Det kan vises at kondisjonstallet $\kappa(\underline{A}_h) = \lambda_{\max}(\underline{A}_h)/\lambda_{\min}(\underline{A}_h)$ til den diskrete Laplace operatoren $\underline{A}_h$ skalerer som

$$\kappa(\underline{A}_h) \sim \mathcal{O}(p^3/h^2) \tag{11}$$

der $h = 1/K$.

e) Estimer antal iterasjoner som trengs for å oppnå konvergens. Kontroller svaret ditt for $p = 1$.

f) Anta at vi ønsker å utvide problemet (7)-(9) til et tilsvarende todimensjonalt problem, og at vi vil løse dette numerisk ved å bruke K triangulære elementer med diameter h. Anta at $p = 1$, dvs lineære elementer. Hvor mange iterasjoner trengs det nå for å oppnå konvergens ved bruk av konjugerte gradienters metode?

Oppgave 4 Betrakt konveksjons-diffusjons-problemet:

$$\begin{aligned} -\kappa\, u_{xx} + U\, u_x &= 0 \quad i \quad \Omega = (0, L) \; , && (12) \\ u(0) &= 0 \; , && (13) \\ u(L) &= 1 \; , && (14) \end{aligned}$$

der κ er en konstant diffusjonskoeffisient og U er en konstant konveksjonshastighet.

Anta at vi vil løse dette problemet numerisk ved hjelp av elementmetoden. Ved bruk av like, lineære elementer og en nodal basis får vi en elementmatrise $\underline{A}^k$ som kan skrives som

$$\underline{A}^k = \frac{\kappa}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{U}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

der h er elementlengden.

a) Beskriv hvordan en typisk rad i det globale likningssystemet ser ut.

b) Anta at $L = 10$, $\kappa = 0.04$ og $U = 2$. Hvor liten må h være for å unngå oscillasjoner i den numeriske løsningen? Hvor mange elementer tilsvarer dette?

c) Hvis h er valgt liten nok slik at vi unngår oscillasjoner, vil du da anbefale å bruke en oppstrømsmetode for å øke nøyaktigheten til den numeriske løsningen?
Begrunn svaret ditt.

Oppgave 5 Betrakt konveksjonsproblemet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} &= f \quad i \quad \Omega = (0, L) \\ u(0,t) &= u(L,t) \\ u(x, t=0) &= u_0(x) \ . \end{aligned}$$

Bruk av lineære elementer resulterer i et system av ordinære differensialligninger på formen

$$\underline{M}_h \frac{d\underline{u}_h}{dt} + \underline{C}_h \underline{u}_h = \underline{F}_h \ .$$

a) Anta at vi ønsker å bruke en eksplisitt tidsintegrasjonsmetode. Vil du anbefale å bruke en forlengs Euler metode for å integrere dette systemet fremover i tid?
Begrunn svaret ditt.

Lykke til!

Einar M. Rønquist