01.11.2016

HYPOTESETESTING [10] F21

EKS: kontroll av produksjon av skruer

Skruelengde: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f $N(\mu, \sigma^2)$ der $\sigma = 0.1$ mm. Hvis maskinen er korrekt kalibrert er $\mu = 15$mm. Maskinen må rekalibreres (produksjon stoppes) hvis μ ikke er 15 mm.

Estimator: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

For hvilke verdier av $\bar{X}$ bør produksjonen stoppes og maskinen rekalibreres.

Tja? $\bar{x} = 15.01$, $\bar{x} = 14.21$? Vi undersøker!

To statistiske hypoteser

H_0: $\mu = 15$mm $\quad (\mu = \mu_0)$

H_1: $\mu \neq 15$mm $\quad (\mu \neq \mu_0)$

H_0: Hypotesen vi vil undersøke om vi har grunnlag fra data til å forkaste.

H_1: Reflekterer spm vi stiller.

Dette kalles en tosidig testsituasjon

(ensidig: $H_1: \mu < 15$ eller $H_1: \mu > 15$)

Vi har to mulige utfall av testsituasjonen:

→ Forkast H_0: vi tror da at $\mu \neq 15$ mm og maskinen må rekalibreres.

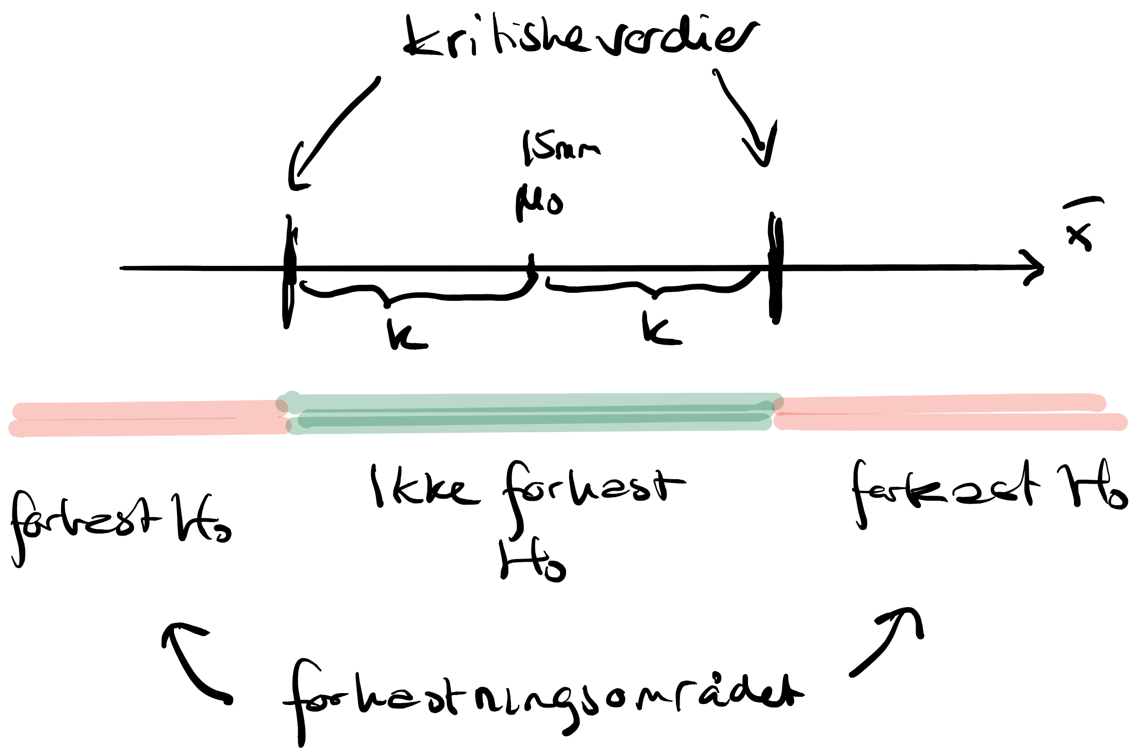
→ Ikke forkast H_0: vi har ikke tilstrekkelig bevis for at H_0 er gal.

NB: ikke "symmetri"

Når bør vi forkaste H_0?

Vi må lage en regel basert på $X_1, X_2, .., X_n$. Et godt anslag for μ

er $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.



Vi forkaster H_0 når $\bar{X} > \mu_0 + k$

eller når $\bar{X} < \mu_0 - k$.

DVS: $|\bar{X} - \mu_0| > k$

Hvordan bestemmer jeg k?

σ, n og hvor høy sannsynlighet for å begå feil som vi vil godta

Hva avhenger k av?

Type I og type II feil

Vi har 4 mulige situasjoner

	$\mu = 15$ mm H_0 sann	$(\mu \neq 15)$ H_0 falsk
Ikke forkaste H_0 (ikke rekalibrer)	KORREKT	Type II feil
Forkast H_0 (rekalibrer)	Type I feil	KORREKT

Vi ønsker å velge forkastningsregel slik at vi har liten sannsynlighet for både type I og type II feil.

Er det mulig?

Anta at vi får beskjed om å forkaste H_0 når $|\bar{X} - \mu_0| > k$, der $k = 0.065$.

(i skrueeksemplet), dvs $\underline{\bar{X} > 15.065}$

eller $\underline{\bar{X} < 14.935}$ $\Rightarrow$ forkast H_0

Er dette en god regel?

Hva blir 1) $P(\text{Type I feil})$ og 2) $P(\text{Type II feil})$

1) $P(\text{Type I feil}) = P(\text{forkaste } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er sann})$

$= P(|\bar{X} - \mu_0| > k \text{ når } H_0 \text{ er sann})$

$= P(\bar{X} - \mu_0 < -k, \text{ når } H_0 \text{ er sann})$

$\quad + P(\bar{X} - \mu_0 > k, \underbrace{\text{når } H_0 \text{ er sann}}_{|\, H_0 \text{ sann}})$

når

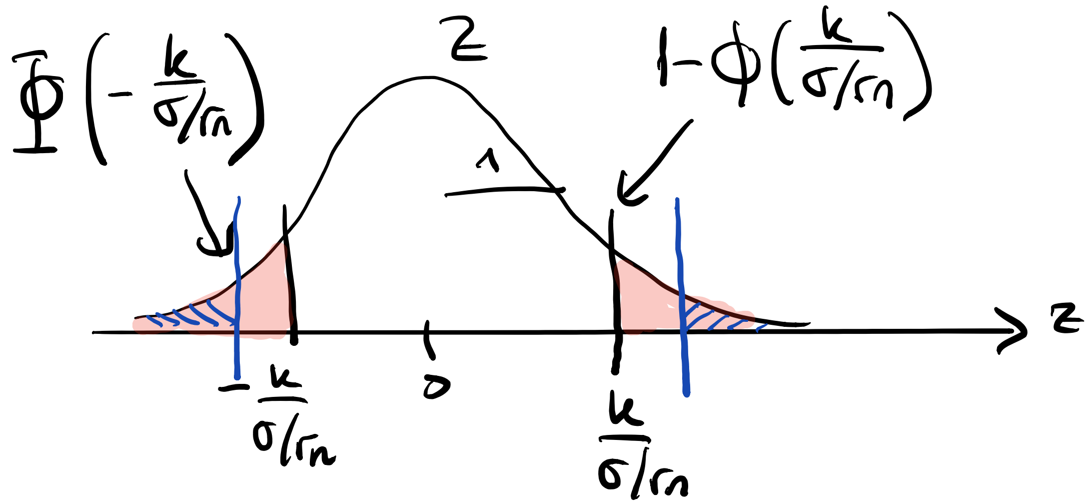
Når H_0 er sann er

$$X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2), \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P(\text{type I feil}) = P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z} < -\frac{k}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, H_0 \text{ sann}\right)$$

$$+ \; P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z} > \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, H_0 \text{ sann}\right)$$



$$P(\text{type I feil}) = 2\cdot\Phi\left(-\frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

EKS: $\mu_0 = 15$, $\sigma = 0.1$, $n = 10$, $k = 0.065$

$$P(\text{Type I feil}) = 2\cdot\Phi\left(-\frac{0.065}{0.1/\sqrt{10}}\right) = \underline{\underline{0.04}}$$

Hva hvis vi velger en større k? ← se blå linjer i figuren over

$\Rightarrow$ P(type I) blir mindre

$\Rightarrow$ bra med stor k.

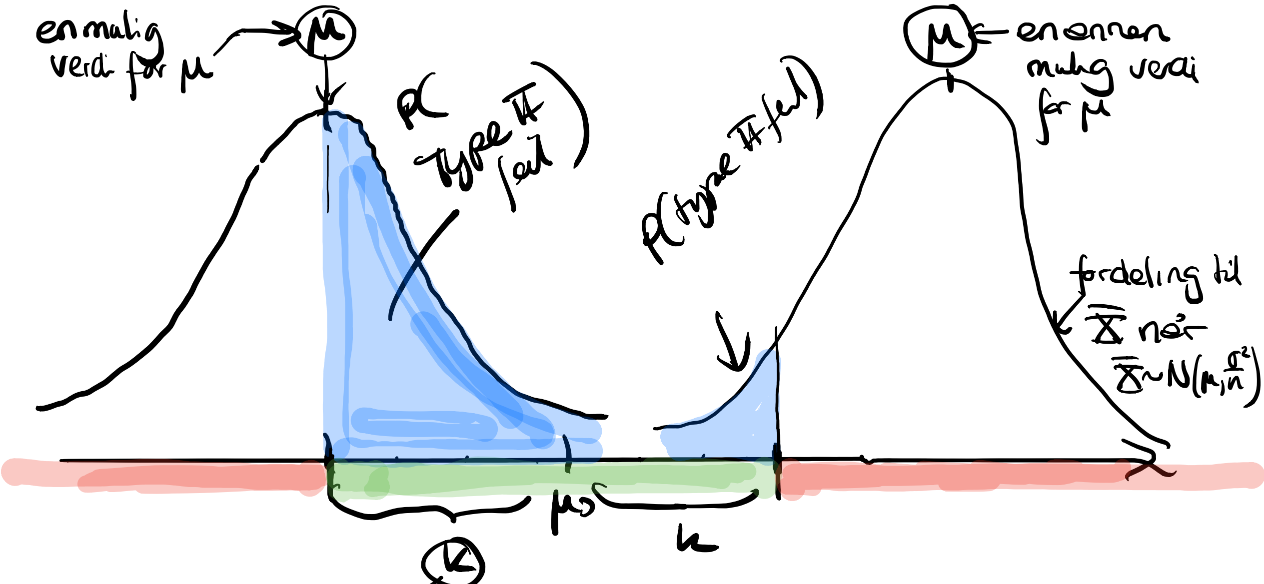
2) $P(\text{type II}) = P(\text{ikke forkaste } H_0 \text{ selv om } H_0 \text{ er gal/usann/falsk})$

$$= P(\,|\bar{X} - \mu_0| \leq k \mid H_0 \text{ usann}\,)$$

$\mu \neq 15\text{cm}$

mange mulige verdier for μ

Figuren viser to mulige verdier for μ og tilhørende P(type II feil)



$P(\text{type II feil})$ = blått område for to ulike μ

Hvis k øker (minker) vil $P(\text{type II feil})$ øke (minke)

$\Rightarrow$ bør velge k så liten som mulig

Vi skal velg k

justismord

- så stor som mulig for å få liten P(type I feil)
- så liten som mulig for å få liten P(Type II feil)

I statistikk: Vi fokuserer på at vi vil ha liten P(type I feil) og velger k som det minste tallet som gir P(type I feil) $\leq \alpha$

signifikansnivå valgt av oss

feks 0,01, 0,05, 0,1

Merk også:

P(forkaste H_0 når H_0 er gal) =

P(forkaste H_0 når H_1 er rett)

= $1 - P(\underbrace{\text{ikke forkaste } H_0 \text{ når } H_1 \text{ er}}_{\text{Type II feil}} \text{ rett})$

$= 1 - P(\text{Type II feil}) = P(\text{forkast } H_0 \text{ når } \mu \text{ er korrekt})$

$\uparrow H_1$

= <u>styrken</u> til testen ← nytt begrep!

P(Type I feil) og P(Type II feil) er avhengig av n ← og denne kan vi ofte bestemme.

SITUASJON: En populasjon, tosidig test om μ, σ kjent: HVA ER FORKASTNINGSREGEL?

1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ u.i.f $N(\mu, \sigma^2)$

σ^2 er kjent.

2) Tosidig test:

$H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_1: \mu \neq \mu_0$

3) Estimator $\bar{X}$ for μ og

Vi forkaster H_0 når $|\bar{X}-\mu_0| > k$,

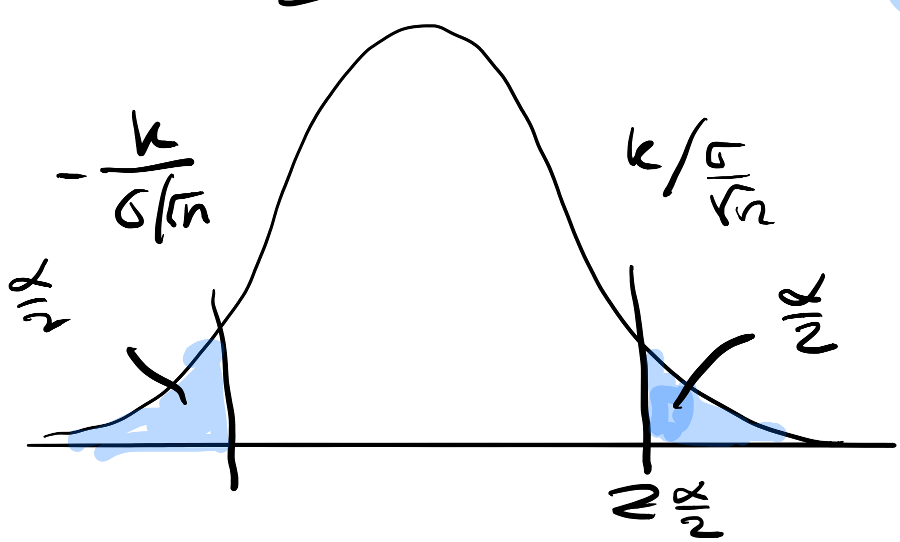
der k bestemmes fra

$$P(\text{Type I feil}) \le \alpha$$

$$P\Big(\underbrace{|\bar{X}-\mu_0| > k}_{\text{forkaste } H_0} \;\Big|\; H_0 \text{ sann}\Big) \le \alpha$$

$$P\Big(\underbrace{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z} < -\frac{k}{\sigma/\sqrt{n}} \;\Big|\; H_0 \text{ sann}\Big)$$

$$+\, P\Big(\underbrace{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z} > \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}} \;\Big|\; H_0 \text{ sann}\Big) \le \alpha$$



$$\frac{k}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$k = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Forkast H_0 når

$$\bar{X} < \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ og } \bar{X} > \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

4) Regn ut $\bar{x}$ fra data, og sammenlign.
Forkast eller ikke forkast H_0.

↓ Lagt til tall fra skrue-eks etter timen ↓

EKS: Skrueeksemplet – hva er forkastnings regel når $\alpha = 0.05$.

Se s 11, topp ↑.

Vi forkaster H_0 når $\bar{X} < \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
eller $\bar{X} > \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma/\sqrt{n}$

Vi har $\mu_0 = 15$
$\alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.025} = 1.96$
$\sigma = 0.1$
$n = 10$

$$\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 15 - 1.96 \frac{0.1}{\sqrt{10}} = 14.94$$
$$\mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 15 + \underbrace{1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{10}}}_{0.06} = 15.06$$

⇒ Forkast H_0 hvis $\bar{X} > 15.06$ eller
$\bar{X} < 14.94$.

Lekse: hva er effekten av å endre (regn ut nedre og øvre forkastningsverdi)

σ fra	0.1	til 0.2	?
n	10	100	?
α	0.05	0.1	?