



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4240 Statistikk
Høst 2017

Anbefalt øving 2
Løsningsskisse

Oppgave 1 En kartong inneholder 10 pakker hvorav 2 er undervektige. Vi skal trekke pakker tilfeldig inntil de to med feil vekt er funnet. Definer:

I_i : pakke trukket som nr i har riktig vekt
 I'_i : pakke trukket som nr i er undervektig.

- a) Ved første trekning er det 10 like sannsynlige utfall, hvorav 2 av utfallene er å trekke en undervektig pakke. Dette gir

$$P(I'_1) = \frac{\#gunstige}{\#mulige} = \frac{2}{10} = 0.20.$$

- b) Dersom den første pakken som trekkes har riktig vekt, gjenstår det to undervektige pakker som kan trekkes. Antallet like sannsynlige utfall er nå 9, da en pakke er trukket.

$$P(I'_2|I_1) = \frac{\#gunstige}{\#mulige} = \frac{2}{9} = 0.22.$$

- c) Da de to utfallene I_1 og I'_1 utgjør en oppdeling av utfallsrommet, kan vi benytte setningen om total sannsynlighet, slik at

$$\begin{aligned} P(I'_2) &= P(I'_2|I_1) P(I_1) + P(I'_2|I'_1) P(I'_1) \\ &= \frac{2}{9} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} \\ &= 0.2. \end{aligned}$$

Alternativt:

Fordi en ikke vet noe mer om den første pakken, vet en like mye om den andre som den første.

$$P(I'_2) = P(I'_1) = \frac{\#gunstige}{\#mulige} = \frac{2}{10} = 0.20.$$

- d) Det er finnes to hendelser som gjør at de to undervektige pakkene ikke er funnet når en har trukket fire pakker. En har da enten trukket en undervektig og tre pakker med riktig vekt, eller ingen undervektige og fire pakker med riktig vekt.

$$p = \frac{\#\text{gunstige}}{\#\text{mulige}} = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{8}{3} + \binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{91}{105} = 0.867$$

e) La

X : antall pakker en må kontrollveie for å finne de to med feil.

Vi har at $P(X = x)$ er sannsynligheten for at en må trekke x pakker for å finne de to undervektige. Vi finner, for hver x , $P(X = x)$ ved å se på antall gunstige over antall mulige plasseringer av de to undervektige pakkene i trekkrekkefølgen.

Antall *mulige* plasseringer av de undervektige pakkene er $\binom{10}{2} = 45$. Antall *gunstige* plasseringer av de to undervektige pakkene vil variere med x . Vi tar for oss økende verdier av x for å finne et mønster.

Vi har at $P(X = 1) = \frac{0}{45}$, da det ikke er mulig å kjenne plasseringen til de to undervektige etter bare ett trekk.

Videre har vi at for $X = 2$ trekk vil det finnes 1 gunstig plassering av de to pakkene som vil føre til at en har oppdaget disse etter bare to trekk (nemlig at de er plassert helt først i trekkrekkefølgen).

For $X = 3$ vil det finnes 2 gunstige plasseringer; posisjon 1 og 3, eller posisjon 2 og 3 i rekkefølgen (merk at plassering av undervektige pakker på posisjon 1 og 2, og en normalvektig pakke på posisjon 3 ville ført til $X = 2$ og teller dermed ikke som et gunstig utfall for dette tilfellet).

Vi ser nå et mønster; vi må for en gitt x finne den andre undervektige pakken på posisjon x , mens den første kan ta enhver tidligere plassering. Det gir $(x - 1)$ gunstige plasseringer av de to undervektige pakkene.

Dersom ingen undervektig pakke er funnet etter 8 trekninger vet vi at de to siste pakkene er undervektige. For tilfellet $X = 8$ har vi dermed $(x - 1) + 1 = 8$ gunstige utfall, nemlig at de to undervektige er nummer 8 og et hvilket nummer mindre enn 8 i trekkrekkefølgen, i tillegg til det gunstige utfallet at de to undervektige er de to siste pakkene i trekkrekkefølgen.

For tilfellet $X = 9$ har vi $x - 1 = 8$ gunstige utfall på samme måte som tidligere. I tillegg vet vi at dersom kun en undervektig pakke er funnet i løpet av de 9 første veiingene vil den siste pakken være undervektig, og vi trenger dermed kun å veie 9 pakker. Det gir enda $x - 1 = 8$ gunstige utfall, og totalt sett har vi for $X = 9$, $(x - 1) + (x - 1) = 16$ gunstige utfall.

Sannsynligheten for at $X = 10$ er 0, da det aldri vil være nødvendig å veie 10 pakker for å finne de to undervektige.

Dette gir

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{x-1}{45} & x = 1, \dots, 7 \\ \frac{8}{45} & x = 8 \\ \frac{16}{45} & x = 9 \\ 0 & x = 10 \end{cases} .$$

Sannsynlighetsfordelingen til antallet pakker som må kontrollveies kan eventuelt beregnes vha multiplikasjonsmetoden:

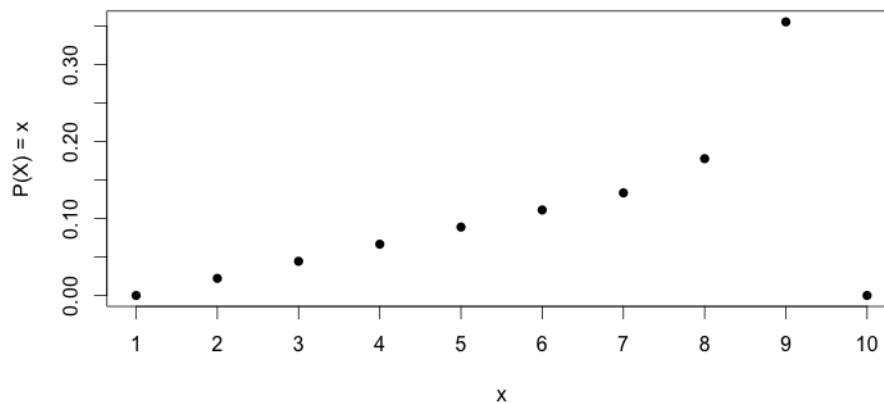
$$P(X = 1) = 0$$

$$P(X = 2) = P(I'_1, I'_2) = P(I'_1) P(I'_2|I'_1) = \frac{2}{10} \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(I'_1, I_2, I'_3) + P(I_1, I'_2, I'_3) \\ &= P(P(I'_1) P(I_2|I'_1) P(I'_3|I'_1, I_2) + P(P(I_1) P(I'_2|I_1) P(I'_3|I_1, I'_2)) \\ &= \frac{2}{10} \frac{8}{9} \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \frac{2}{9} \frac{1}{8} = \frac{2}{45} \end{aligned}$$

⋮

Figur 1 viser punktsannsynlighetene.

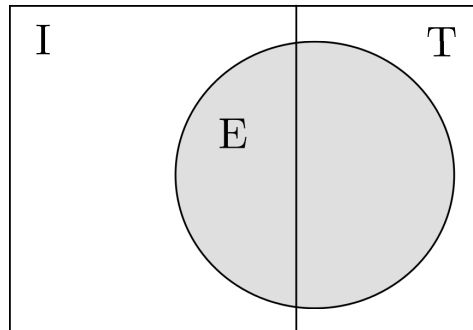


Figur 1: Punktsannsynligheter

Oppgave 2

For en tilfeldig valgt person som turistene støter på, definerer vi de tre hendelsene

- I: personen er innfødt,



Figur 2: Venndiagram for hendelsene I, T og E.

- T: personen er turist,
- E: personen snakker engelsk.

Opplysningene i oppgaveteksten kan da formuleres som følger.

- Hver tiende innfødte snakker engelsk: $P(E|I) = 1/10$,
- hver femte person han møter er turist: $P(T) = 1/5$,
- annenhver turist snakker engelsk: $P(E|T) = 1/2$.

- a) Vi antar at alle personene turisten møter enten er innfødte, eller er turister selv. Da er I og T komplementære hendelser, slik at

$$P(I) + P(T) = 1 \quad \text{og} \quad P(I) = 1 - P(T) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

I venndiagrammet i figur 2 er dette illustrert ved å dele opp rektangelet som representerer hele utfallsrommet i to deler. Siden vi har engelsktalende både blant de innfødte og blant turistene, plasserer vi regionen som representerer E slik at den overlapper både I og T.

- b) Sannsynligheten for at en tilfeldig person turisten møter er engelsktalende, er gitt ved loven om total sannsynlighet,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap I) + P(E \cap T) \\ &= P(E|I)P(I) + P(E|T)P(T) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{50}. \end{aligned}$$

- c) For å finne den betingede sannsynligheten for at en person er innfødt, gitt at vedkommende snakker engelsk, bruker vi definisjonen av betinget sannsynlighet, samt sannsynligheten $P(E)$ fra **b**),

$$P(I|E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|I)P(I)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{9}{50}} = \frac{4}{9}.$$