TMA4240 Statistikk
Høst 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 12
Løsningsskisse

Oppgave 1

a) Minste kvadraters metode tilpasser en linje til punktene ved å velge den linja som minimerer kvadratsummen

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

av avstanden fra hvert punkt til linja. Derivasjon av SSE med hensyn på parametrene α og β gir

$$\frac{d\text{SSE}}{d\alpha} = -2\sum_i (y_i - \alpha - \beta x_i) \quad \text{og} \quad \frac{d\text{SSE}}{d\beta} = -2\sum_i x_i(y_i - \alpha - \beta x_i).$$

Setter vi de deriverte lik null, får vi

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i) = 0 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \alpha - \beta x_i) = 0,$$

og, når vi deler på n,

$$\bar{y} - \alpha - \beta\bar{x} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \alpha\bar{x} - \beta \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

Løser den første likningen for α, og får

$$\alpha = \bar{y} - \beta\bar{x},$$

som innsatt i den andre likningen gir

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{y} - \beta\bar{x})\bar{x} - \beta \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\bar{x} + \beta\left(\bar{x}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}.$$

Ganger vi med n i teller og nevner i det siste uttrykket, får vi

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}.$$

For få de oppgitte estimatorene bytter vi ut y_i med den tilsvarende tilfeldige variabelen Y_i, altså

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad \text{og} \quad \widehat{\alpha} = \bar{Y} - \widehat{\beta}\bar{x}.$$

b) Utgangspunktet er

$$P\left(-t_{n-2,0.025} < \frac{(\hat{\beta}-\beta)}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}} < t_{n-2,0.025}\right) = 0.95$$

Løser hver av ulikhetene for β og får

$$-t_{n-2,0.025} < \frac{(\hat{\beta}-\beta)}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}} \Rightarrow -\frac{-st_{n-2,0.025}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}} < \hat{\beta}-\beta$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} + \frac{st_{n-2,0.025}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}} > \beta$$

og

$$\frac{(\hat{\beta}-\beta)}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}} < t_{n-2,0.025} \Rightarrow \hat{\beta}-\beta < \frac{st_{n-2,0.025}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}}$$

$$\Rightarrow \beta > \hat{\beta} - \frac{st_{n-2,0.025}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}}.$$

Dermed har vi

$$P\left(\hat{\beta} - \frac{st_{n-2,0.025}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}} < \beta < \hat{\beta} + \frac{st_{n-2,0.025}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}}\right) = 0.95,$$

Og konfidensintervallet blir altså

$$\left(\hat{\beta} - \frac{st_{n-2,0.025}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}}, \hat{\beta} + \frac{st_{n-2,0.025}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}}\right).$$

Vi har $n = 29$ og tabelloppslag gir kvantilen $t_{n-2,0.025} = t_{27,0.025} = 2.0518$. Innsetting av tallverdier gir estimatet $\hat{\beta} = -6364.6/40169 = -0.1584$. Vinnertiden forventes å forkortes med $4 \cdot 0.1584 \approx 0.63$ sekunder mellom etterfølgende olympiske leker. Videre er 95%-konfidensintervallet for stigningstallet lik $(-0.1925, -0.1244)$.

c) Vi lar $x_0 = 2020$, og vi har $\hat{\alpha} = 109.0114 + 0.1584 \cdot 1956.6 = 418.9368$. Den predikerte tiden er $\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + 2020\hat{\beta} = 418.9368 - 0.1584 \cdot 2020 = 98.8768$, altså ca. 1 minutt og 39 sekunder. Vinnertiden i 2020 har 95%-prediksjonsintervall

$$\hat{Y}_0 \pm t_{n-2,0.025} s \sqrt{1 + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2} + 1/n}.$$

Med tallverdier innsatt blir det $(91.62, 106.14)$.

d) Vi har $\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + x_0\hat{\beta} = 90$, som betyr at

$$x_0 = \frac{90 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \frac{90 - 418.9368}{-0.1584} = 2076.024$$

Siden $x_0 > 2076$ forventer vi strengt tatt ikke at 90-sekundersgrensen brytes under OL i 2076, men først under neste OL, altså i 2080. Tar man den store usikkerheten i betraktning, fremstår imidlertid 2076 som et like godt svar som 2080.

Modellantakelser: Det ser ut til at vinnertidene følger en ikkelineær trend i tid. Om vi bruker den tilpassede modellen til å ekstrapolere bakover i tid, ser vi at den tilsier at vinnertiden i år 0 ville vært 419 sekunder, hvilket er urimelig. Ekstrapolererer vi tilstrekkelig langt framover i tid, predikerer modellen dessuten negative vinnertider, hvilket er umulig.

Modellantakelsene kan kontrolleres ved hjelp av residualplott. Ser residualene $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ ut til å ha en trend? Ifølge modellen bør de være nærmest uavhengige og identisk normalfordelt.

Oppgave 2

a) - β angir bilens bensinforbruk (i liter/mil)

- Rimelig med $\alpha = 0$ fordi med $x = 0$ (ingen kjøring) brukes ingen bensin

- en tur av lengde $x_1 = x$ kan tenkes sammensatt av to turer på $x_2 = x/2$ og $x_3 = x/2$. La Y_1, Y_2, Y_3 være tilhørende bensinforbruk. Det er da rimelig å kreve at

$\text{Var}(Y_1) = \text{Var}(Y_2) + \text{Var}(Y_3)$.

Dette oppnås ved å velge

$\text{Var}(Y) = x\sigma^2$

b) $\beta = 0.75 \quad , x = 5.0 \quad , \sigma^2 = 0.1^2$

Dette betyr at

$Y \sim n(y; \beta x, \sqrt{x\sigma^2}) \sim n(y; 3.75, \sqrt{0.05})$

$$\begin{aligned} P(Y > 4) &= 1 - P(Y \leq 4) = 1 - P\left(\frac{Y - 3.75}{\sqrt{0.05}} \leq \frac{4 - 3.75}{\sqrt{0.05}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.12) = 1 - 0.869 = \underline{\underline{0.131}} \end{aligned}$$

Ser så på to kjøreturer

$Y_1 \sim n(y; 3.75, \sqrt{0.05})$ og

$Y_2 \sim n(y; 7.5, \sqrt{0.1})$

P.g.a. uavhengighet har vi at $Z = Y_1 + Y_2 \sim n(z; 3.75 + 7.5, \sqrt{0.05 + 0.10})$.

$$\begin{aligned} P(Z < 12) &= P\left(\frac{z - 11.25}{\sqrt{0.15}} \leq \frac{12 - 11.25}{\sqrt{0.15}}\right) = \Phi(1.94) \\ &= \underline{\underline{0.974}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U = Y_2 - 2Y_1 &\sim n(z; 0, \sqrt{0.1 + 4 \cdot 0.05}) \\
P(Y_2 - 2Y_1 > 0) &= P(U > 0) = \underline{\underline{0.5}}
\end{aligned}
$$

Siden fordelingen til U er symmetrisk om $u = 0$.

c) Studerer to estimatorer $\hat{\beta}$ og $\tilde{\beta}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{\beta}) &= \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}\right) = \frac{\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n Y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \beta x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} = \beta \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} = \underline{\underline{\beta}} \\
\mathrm{Var}(\hat{\beta}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}\right) = \frac{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n Y_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(Y_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i} \\
&= \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\tilde{\beta}) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left(\frac{Y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{E}(Y_i)}{x_i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\beta x_i}{x_i} = \frac{\beta}{n}\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i} = \frac{\beta}{n} n = \underline{\underline{\beta}} \\
\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\left(\frac{Y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{Var}(Y_i)}{x_i^2} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{x_i \sigma^2}{x_i^2} = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}}
\end{aligned}
$$

Vi ser at begge estimatorene er forventingsrette. Vi foretrekker den med minst varians. Med oppitte tall for x_i'ene får vi

$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \cdot 0.00299$ og $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = \sigma^2 \cdot 0.0107$

Det vil si at vi $\underline{\underline{\text{foretrekker } \hat{\beta}}}$

d)

$$H_0 : \beta = 0.56 \quad \text{mot } H_1 : \beta > 0.56$$

$\hat{\beta}$ blir normalfordelt siden den er en lineærkombinasjon av uavhengige, normalfordelte variabler.

Under H_0 vil en ha at $\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 0.56$ og $\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i}$

Vi benytter testobservatoren

$$U = \frac{\hat{\beta} - 0.56}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i}}} \sim n(u; 0, 1) \quad \text{under } H_0$$

Vi forkaster H_0 dersom $U > k$, der k bestemmes fra kravet

$$P(\text{Forkast } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er riktig }) = 0.05$$

det vil si at $k = u_{0.05} = 1.645$
Innsatt observasjonene:

$$\hat{\beta} = 0.584 \quad \sigma^2 = 0.1^2 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 335 \quad \Rightarrow U = \frac{0.584 - 0.56}{\sqrt{\frac{0.1^2}{335}}} = 4.38 > k$$

Det vil si $\underline{\underline{\text{Forkast } H_0}}$. Vi vil da påstå at bilen bruker mer bensin enn forhandleren sier.

e) Vet at

$$V = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}} \sim n(v; 0, 1)$$

$$\begin{aligned}
P\left(-u_{0.025} \leq V \leq u_{0.025}\right) &= 0.95 \\
P\left(-u_{0.025} \leq \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}} \leq u_{0.025}\right) &= 0.95 \\
P\left(\hat{\beta} - u_{0.025}\sigma\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_1}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + u_{0.025}\sigma\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_1}}\right) &= 0.95
\end{aligned}$$

Vi finner da et 95% konfidensintervall for β

$$\left[\hat{\beta} - u_{0.025}\sigma\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_1}} \, , \, \hat{\beta} + u_{0.025}\sigma\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_1}}\right]$$

Innsatt for tallverdiene $\hat{\beta} = 0.584$, $\sigma = 0.1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 335$ og $u_{0.025} = 1.96$ får vi da

$$\underline{\underline{[0.573, 0.595]}}$$

Oppgave 3

a) $Y \sim n(y; 500, 80)$. Transformerer Y til standard $N(0,1)$-normalfordeling.

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(Y > 550) &= \text{Prob}\left(\frac{Y - 500}{80} > \frac{550 - 500}{80}\right) = \text{Prob}\left(Z > \frac{5}{8}\right) \\
&= 1 - \text{Prob}\left(Z \leq \frac{5}{8}\right) = 1 - \Phi(0.625) = 1 - 0.734 = 0.266.
\end{aligned}$$

$Y_1 - Y_2 \sim n(y; 0, \sqrt{2} \cdot 80)$. (Lineærkombinasjonen av to uavhengige normalfordelinger er normalfordelt, sjekk forventningsverdi og varians ved de vanlige regnereglene.)

Da kan vi regne ut sannsynligheten for at målingene avviker med mer enn 80 g/tonn.

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(|Y_1 - Y_2| > 80) &= 1 - \text{Prob}(-80 < Y_1 - Y_2 < 80) \\
&= 1 - \text{Prob}\left(\frac{-80}{80\sqrt{2}} < \frac{Y_1 - Y_2}{80\sqrt{2}} < \frac{80}{80\sqrt{2}}\right) \\
&= 1 - \text{Prob}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} < Z < \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\text{Prob}\left(Z \le \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 2\Phi(-0.707) \\
&= 2 \cdot 0.24 = 0.48.
\end{aligned}$$

b) Setter inn $\overline{x} = 20$, $x_1 = \ldots = x_5 = 0$ og $x_6 = \ldots = x_{10} = 40$ i uttrykket for B.

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\sum_{j=1}^{5} -20Y_j + \sum_{j=6}^{10} 20Y_j}{\sum_{j=1}^{10} 20^2} = \frac{20\left(\sum_{j=6}^{10} Y_j - \sum_{j=1}^{5} Y_j\right)}{10 \cdot 20^2} \\
&= \frac{\sum_{j=6}^{10} Y_j - \sum_{j=1}^{5} Y_j}{200}, \text{som skulle vises.}
\end{aligned}$$

$$A = \overline{Y} - B\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} Y_j - \frac{20}{200}\left(\sum_{j=6}^{10} Y_j - \sum_{j=1}^{5} Y_j\right) = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} Y_j.$$

A er skjæringspunktet regresjonslinja har med y-aksen. Det er kanskje ikke så rart at gjennomsnittet av målingene ved $x = 0$ er et estimat for denne verdien? (I hvert fall når målingene bare er gjort for to x-verdier.)

$$\text{Var}(B) = \frac{1}{200^2}\left(\sum_{j=6}^{10} \text{Var}(Y_j) + \sum_{j=1}^{5} \text{Var}(Y_j)\right) = \frac{10\sigma^2}{200^2} = \frac{\sigma^2}{4000}.$$

c) Med bare to målepunkter, kan vi estimere variansen i hver ende for seg, dvs at vi beregner s_V^2 og s_E^2. (Husk at målingene ikke har samme forventningsverdi i de to endene av gruva, så vi kan ikke se på alle som ett datasett.) Ettersom vi antar samme varians i begge ender, er gjennomsnittet av s_V^2 og s_E^2 et godt estimat for σ^2.

Mer formelt, vi har en to-utvalgssituasjon, og kan da bruke s_p^2 fra pensum. Denne sikrer χ^2-fordeling og T-fordeling. Brukes estimatoren for variansen fra regresjonsanalysen, får en også samme resultat.

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{2}\left(s_V^2 + s_E^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{j=1}^{5}(y_j - \overline{y}_V)^2}{5-1} + \frac{\sum_{j=6}^{10}(y_j - \overline{y}_E)^2}{5-1}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\sum_{j=1}^{5}(y_j - \overline{y}_V)^2 + \sum_{j=6}^{10}(y_j - \overline{y}_E)^2\right) = \frac{26064 + 22720}{8} = 6098.
\end{aligned}$$

Hypotesene blir: H_0: $\beta = 12$ mot H_1: $\beta > 12$.

Vi baserer testen på estimatoren B. Siden variansen til B er ukjent, bruker vi estimatet $S_B^2 = \frac{s^2}{4000} = 1.525$ i stedet for $\frac{\sigma^2}{4000}$.

Testobservatoren, $\frac{B-12}{S_B}$, er T-fordelt med 8 frihetsgrader. Det er $n-2$ frihetsgrader denne gangen, fordi vi bruker "pooled" varians, eller, som sagt, variansestimatoren fra regresjonsanalysen. (Estimert varians er basert på to gjennomsnitt, $\overline{y}_V$ og $\overline{y}_E$. Da er det ikke så urimelig at vi mister to frihetsgrader?) Med oppgitte data blir stigningstallet

$$b = \frac{\sum_{j=6}^{10} y_j - \sum_{j=1}^{5} y_j}{200} = \frac{\overline{y}_E - \overline{y}_V}{40} = 17.$$

Gjennomfører hypotesetesten.

$$\frac{b-12}{s_B} = \frac{17-12}{\sqrt{1.525}} = 4.05 > t_{0.05,8} = 1.86,$$

som betyr at vi forkaster nullhypotesen på signifikansnivå 5%.

d) Fra det første uttrykket for B får vi

$$\text{Var}(B) = \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}.$$

Variansen er liten for $\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2$ stor. Altså vil vi ha alle $|x_j - \overline{x}|$ så store som mulig. Når $\overline{x}$ er fast, bør x_j-ene legges til endene, som i denne oppgaven. (Det kan være andre grunner til å spre målepunktene, f.eks. for å vurdere om dataene tilnærmet følger en rett linje, her var det antatt kjent.)

$$\text{Var}(Y_0 - \widehat{Y}_0) = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}\right) = \frac{11}{10}\cdot\sigma^2$$

når $x_0 = \overline{x}$. Punktestimatet blir $\widehat{y}_0 = a + bx_0 = \overline{y}_V + 17\cdot 20 = 470$.

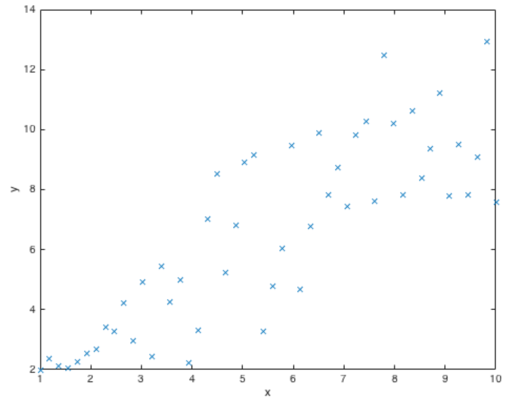
Vi benytter fortsatt estimatet S^2 for σ^2, derfor fortsatt T-fordeling med $n-2$ frihetsgrader. Prediksjonsintervallet blir derfor

$$(\widehat{y}_0 \pm t_{0.025,8}\cdot s\sqrt{\frac{11}{10}}) = (470 \pm 2.306\cdot\sqrt{6098}\cdot\sqrt{1.1}) = (281.1, 658.9).$$

Den nye målingen, 600 g/tonn, ligger innenfor prediksjonsintervallet, så vi kan ikke konkludere med at den eller modellen er urimelig.

Oppgave 4

a) Fra Figur 1 ser vi at y øker når x øker, derfor er korrelasjonen positiv.



Figur 1: Spredningsplott av (x_i, y_i) for $i = 1, \ldots, 50$.

```
% Les inn data
A = load('anb12.txt');
x = A(:, 1);
y = A(:, 2);

% Plott x mot y
figure
plot(x,y, 'x')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Vi tilpasser den lineære modellen på følgende måte i Matlab:

```
% Tilpass modell
mdl = fitlm(x, y);

% Skriv ut modell
mdl

mdl = 


Linear regression model:
    y ~ 1 + x1

Estimated Coefficients:
                   Estimate       SE        tStat       pValue  
                   ________    ________    ______    __________

    (Intercept)     1.1549      0.55791      2.07      0.043855
    x1             0.97084     0.091379    10.624    3.3607e-14
```

```
Number of observations: 50, Error degrees of freedom: 48
Root Mean Squared Error: 1.71
R-squared: 0.702,  Adjusted R-Squared 0.695
F-statistic vs. constant model: 113, p-value = 3.36e-14
```

Fra utskriften i Matlab ser vi at $\hat{\alpha} = 1.1549$ og $\hat{\beta} = 0.97084$. Siden p-verdien er 0.043855 vil vi ikke forkaste H_0 ved 5% signifikansnivå.

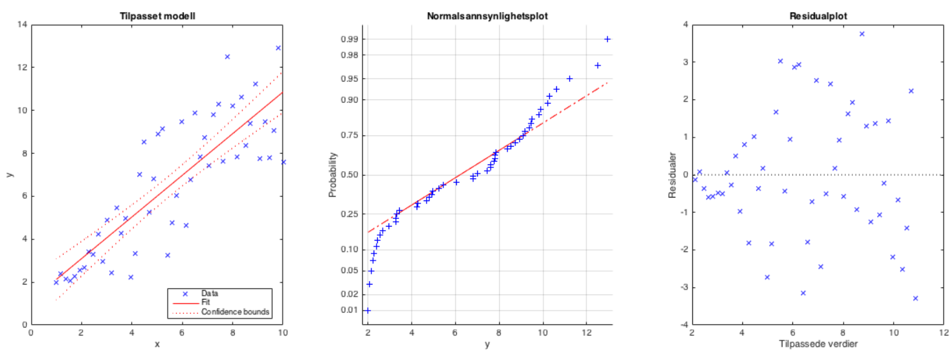
Vi kan plotte den tilpassede modellen, normalsannsynlighetsplottet og residualplottet som følger:

```
% Plott modellen og observasjoner
figure;
subplot(1,3,1)
plot(mdl);
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Tilpasset modell')


% Normalsannsynlighetsplott
subplot(1,3,2)
normplot(y)
xlabel('y')
title('Normalsannsynlighetsplott');

% Plott residualer
subplot(1,3,3)
plotResiduals(mdl,'fitted');
xlabel('Tilpassede verdier')
ylabel('Residualer')
title('Residualplott')
```

Fra observasjonene ser vi at en lineær modell passer nokså godt siden forventningen til Y er lineær i x. Fra plottet av den tilpassede modellen ser vi at støyleddene ser ut til å være normalfordelte siden observasjonene er jevnt fordelt over og under regresjonslinjen. Fra residualplottet ser vi variansen øker med x. Altså er *ikke* kravet om konstant varians oppfylt.



Figur 2: Tilpasset lineær modell, normalsannsynlighetsplott og residualplott.