



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for matematiske fag

TMA4240 Statistikk  
Høst 2017

**Anbefalt øving 5**

Denne øvingen er satt sammen med utgangspunkt i den delen av pensum som gjennomgås i sjettede forelesningsuke. Oppgavene dreier seg i hovedsak om diskrete sannsynlighetsfordelinger.

### Oppgave 1

Antall trykkfeil,  $N$ , i et manuskript på  $s$  sider, antas å være en poissonfordelt stokastisk variabel med parameter  $\lambda s$ , dvs.

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp(-\lambda s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En korrekturleser som leser korrektur på manuskriptet antas å oppdage hver trykkfeil med sannsynlighet  $p$  og ikke oppdage trykkfeilen med sannsynlighet  $1 - p$ . La  $X$  være antall feil korrekturleseren finner dersom han leser igjennom manuskriptet en gang. Vi skal anta at  $X$  gitt  $N=n$  er binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

- a) Hvilken betingelse må vi i tillegg anta dersom vår antagelse om at  $X|N=n$  er binomisk fordelt, skal være korrekt?

Dersom  $\lambda = 2$  og manuskriptet er på  $s = 8$  sider, hva er da sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?

Dersom vi vet at manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og at  $p = 0.6$ , hva er da sannsynligheten for at korrekturleseren vil finne alle trykkfeilene?

La  $Y_k$  være antall trykkfeil som gjenstår etter at korrekturleseren har lest igjennom manuskriptet  $k$  uavhengige ganger ( $k = 1, 2, \dots$ ), dvs.  $Y_1$  er antall trykkfeil som gjenstår etter en gjennomlesning.

- b) Finn simultanfordelingen til  $Y_1$  og  $N$ , og bruk den til å finne (marginal)fordelingen til  $Y_1$ .

**Oppgave 2** I et TV-program får et visst antall deltakere sjansen til å vinne et større pengebeløp. For hver deltaker består spillet av en serie påfølgende runder, der deltakeren i hver runde får presentert en oppgave. For hver oppgave deltakeren klarer, får han/hun et gitt beløp. Spillet avsluttes når deltakeren første gang ikke greier oppgaven, og deltakeren får da

med seg beløpet vunnet i de øvrige rundene. Vi antar at ingen deltaker trekker seg frivillig underveis.

La  $p$  være sannsynligheten for IKKE å klare oppgaven i hver enkelt runde, og la videre  $X$  være antall runder for en tilfeldig valgt deltaker. Antall runder  $X$  defineres her slik at deltakeren går ut etter å ha klart oppgavene i de  $X - 1$  første rundene, men ikke oppgaven i runde  $X$ . Vi antar at sannsynligheten  $p$  er lik for hver runde og for hver deltaker, og at resultatene for hver runde er uavhengige.

a) Anta bare i dette punktet at  $p = 0.10$ .

Forklar hvorfor  $X$  er geometrisk fordelt med parameter  $p$  i denne situasjonen.

Beregn sannsynligheten for at deltakeren går ut i første runde.

Beregn sannsynligheten for at deltakeren er med i spillet når det er gått fem runder.

Hva er sannsynligheten for at han/hun kommer videre til niende runde men ikke klarer oppgaven i niende runde, gitt at deltakeren var med i spillet når det var gått fem runder?

TV-selskapet bruker to personer, A og B, til å lage oppgavene. Selskapet ønsker å undersøke om vanskelighetsgraden er avhengig av hvem av dem som lager oppgavene.

De ser på resultatene fra  $n_1$  tilfeldig valgte deltakere som har oppgaver fra oppgavelager A, og  $n_2$  fra oppgavelager B. La  $Z_1$  og  $Z_2$  være antallet blant disse som klarer færre enn fem oppgaver fra henholdsvis oppgavelager A og B. Vi antar at  $Z_1$  og  $Z_2$  er uavhengige.

b) Forklar hvorfor  $Z_1$  og  $Z_2$  er binomisk fordelte med parametre  $(n_1, q_1)$  og  $(n_2, q_2)$ , der  $q_1$  og  $q_2$  er sannsynligheten for å klare færre enn fem oppgaver i de to gruppene.

### Oppgave 3

Fra høsten 2004 vil det i emnet “Statistikk” bli innført tellende skriftlig midtveiseksamen. Denne vil bli gitt i form av en flervalgsoppgave (“multiple choice”) bestående av  $n = 20$  spørsmål som alle har  $m$  svaralternativer. Studentene må velge et svaralternativ for hvert spørsmål (det er således ikke lov å svare “blankt” på et spørsmål). For å bestå midtveiseksamen må minst 8 spørsmål være korrekt besvart.

Ole lurer på om han skal la være å lese til midtveiseksamen og heller velge tilfeldige svaralternativer på alle spørsmålene (han vil da ikke engang lese oppgaveteksten før han svarer). Før han bestemmer seg, ber han en studiekamerat regne ut hvor stor sannsynlighet han da har for å bestå midtveiseksamen.

La  $X$  være antall korrekte svar Ole får på de  $n = 20$  spørsmålene.

a) Forklar hvorfor vi kan anta at  $X$  er binomisk fordelt med  $n = 20$  og  $p = \frac{1}{m}$ . (Det er ikke tilstrekkelig å skrive opp de generelle forutsetningene for en binomisk fordeling, betingelsene må relateres direkte til situasjonen som er beskrevet.)

Finn sannsynligheten for at Ole består midtveiseksamen hvis han velger å svare tilfeldig på alle spørsmålene, dvs.  $P(X \geq 8)$ , når antall svaralternativer er  $m = 2$ . Finn også  $P(X \geq 8)$  for  $m = 4$  og  $m = 5$ .

Hva blir forventet antall korrekte svar, dvs.  $E(X)$ , når  $m = 2, 4, 5$ ?

Vi benytter videre at hvert spørsmål har  $m = 5$  svaralternativer.

Ole bestemmer seg for å bruke midtsemesteruken til å jobbe med statistikk. Dagen før midtveiseksamen setter han seg ned og deler pensum inn i tre kategorier; de delene av pensum han synes han kan godt, de han kan middels godt, og de han kan dårlig.

Vi ser på et tilfeldig valgt spørsmål fra midtveiseksamen og definerer følgende fire hendelser:

$G$  = spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan godt,

$M$  = spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan middels godt,

$D$  = spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan dårlig,

$K$  = Ole svarer korrekt på spørsmålet.

Ole setter opp følgende sannsynligheter:

$P(G) = 0.3$ ,  $P(M) = 0.5$ ,  $P(D) = 0.2$ ,  $P(K|G) = 0.8$ ,  $P(K|M) = 0.4$ ,  $P(K|D) = 0.2$ .

b) Vis de fire hendelsene i et venndiagram.

Hva er sannsynligheten for at Ole svarer korrekt på et tilfeldig valgt spørsmål,  $P(K)$ ?

Gitt at Ole svarer korrekt på et tilfeldig valgt spørsmål, hva er da sannsynligheten for at spørsmålet er fra den delen av pensum som Ole kan dårlig,  $P(D|K)$ ?

#### Oppgave 4

En entreprenør har leid inn et transportfirma til å transportere masse bort fra en byggeplass. Det er to mulige veivalg fra byggeplassen til stedet der massen skal deponeres, gjennom eller utenom bykjernen. Av helse, miljø og sikkerhetshensyn velger entreprenøren at massen skal transporteres utenom bykjernen.

Når oppdraget er ferdig har transportfirmaet kjørt 1000 turer, og transportfirmaet informerer entreprenøren om at av de 1000 turene har 5 blitt kjørt gjennom bykjernen og 995 er blitt kjørt utenom bykjernen.

I løpet av transportperioden har entreprenøren ved 5 tilfeldig valgte transporter sjekket om transporten har skjedd gjennom bykjernen. La  $X$  være antall ganger, av de 5 transportene som ble sjekket, entreprenøren finner at massen er blitt transportert gjennom bykjernen.

Hvilken fordeling har  $X$ ? Begrunn svaret.

Hvilken verdi av  $X$  har høyest punktsannsynlighet?

Nå viser det seg at entreprenøren fant at i 5 av de 5 tilfellene han sjekket så ble massen transportert gjennom bykjernen. Hva er sannsynligheten for dette, dvs.  $P(X = 5)$ ?

#### Fasit

1. a)  $P(N > 10) = 0.923$ ,  $P(\text{finner alle feil}) = 0.0022$

4.  $P(X = 5) = 1.21 \cdot 10^{-13}$