



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4240 Statistikk
Høst 2017

Skriftlig innlevering 2 (blokk 1)

Dette er den andre av tre skriftlige innleveringer i Blokk 1. Den er basert på det som er diskutert i forelesningene frem til og med uke 37. Spesielt er det i denne innleveringen fokus på sannsynlighetsfordelinger, forventningsverdi og varians. Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med utfallsrom $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Punktsannsynlighetene for hvert utfall er gitt i følgende tabell

| | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | 0.1 | 0.1 | 0.5 | 0.2 | 0.1 |

Regn ut forventningsverdien til X .

Bestem sannsynlighetene

$$P(X \geq 0) \quad \text{og} \quad P(X \geq 0 | X \leq 1).$$

Oppgave 2

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & \text{for } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der k er en konstant.

Bestem k slik at $f(x)$ er en gyldig sannsynlighetstetthet, og skisser $f(x)$.

Beregn sannsynlighetene $P(X \leq 0.6)$ og $P(X \leq 0.8 | X > 0.6)$.

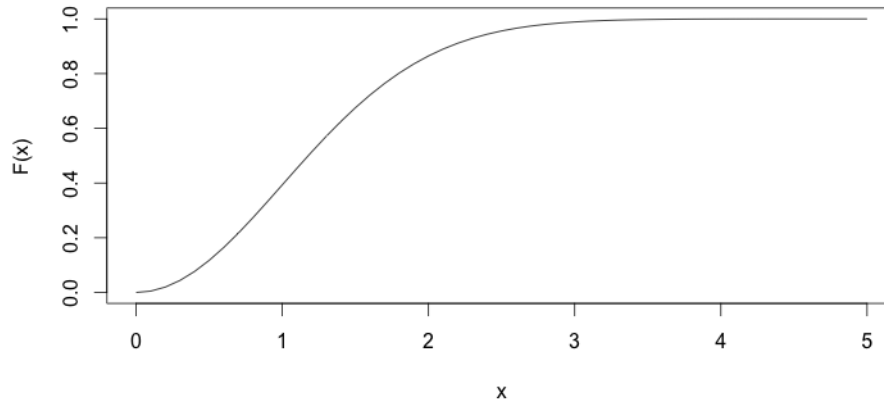
Oppgave 3

La den tilfeldige variabelen X beskrive i hvor lang tid en komponent har fungert i det den blir ødelagt. Vi kaller X for *levetiden* til komponenten.

Levetiden (målt i år), X , til en bestemt type mekaniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjon gitt ved

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\alpha}\right\}; \quad x > 0$$

der α er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene. Den kumulative fordelingsfunksjonen er vist i Figur 1, for tilfellet $\alpha = 1$. Fra figuren ser vi for eksempel at det svært sannsynlig at en komponent slutter å fungere i løpet av fem år.

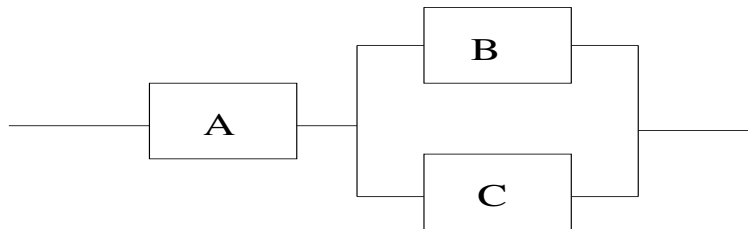


Figur 1: Kumulativ fordelingsfunksjon for levetid X

a) Bestem sannsynlighetstettheten til X .

Bestem for hvilken verdi av x sannsynlighetstettheten $f(x)$ tar sitt maksimum. Skisser $f(x)$.

Et instrument inneholder tre komponenter av denne typen, alle med samme kvalitetsparameter α . Vi refererer til de tre komponentene som komponenter A, B og C. Det antas at de tre komponentene svikter uavhengig av hverandre. Komponentene inngår i instrumentet slik at instrumentet kun vil fungere så lenge komponent A og minst en av komponentene B og C fungerer. Dette kan illustreres med følgende figur.



La følgende fire hendelser være definert:

A: Komponent A fungerer fremdeles etter to år.

B: Komponent B fungerer fremdeles etter to år.

C: Komponent C fungerer fremdeles etter to år.

D: Instrumentet fungerer fremdeles etter to år.

b) Tegn inn hendelsene A, B og C i et Venn-diagram.

Skriver hendelsen D i Venn-diagrammet.

For $\alpha = 1$, finn sannsynligheten for at instrumentet fremdeles fungerer etter to år.

Oppgave 4

Det skal tas blodprøve av samtlige soldater i en militæravdeling for å finne ut om noen er smittet av en bestemt sykdom. Sannsynligheten for at blodprøven fra en tilfeldig valgt soldat er positiv (dvs. at han er smittet) antas å være lik p , og testresultatene for ulike individer antas å være uavhengige.

Man går frem på følgende måte: Blodprøver tas av $k (> 1)$ soldater om gangen, blodprøvene blandes og blandingen analyseres. Hvis den gir positiv reaksjon, noe som betyr at minst en av soldatene er smittet, tas nye blodprøver av de k , og prøvene analyseres enkeltvis. Hvis blandingen gir negativ reaksjon, blir det ikke tatt flere prøver.

- a) Vis at sannsynligheten for at en blanding av k blodprøver skal gi positiv reaksjon er

$$1 - (1 - p)^k.$$

- b) Hvordan defineres betinget sannsynlighet for en hendelse A gitt en annen hendelse B ? Soldat 19 Haugen får beskjed om at hans k -gruppe har vist positiv reaksjon. Hva er da sannsynligheten for at han er positiv?
- c) Anta at en avdeling består av m grupper, hver med k soldater, slik at det totale antallet soldater er mk . La X være antall blodprøver som må analyseres før hele avdelingen er ferdig kontrollert. Vis at

$$E(X) = mk \left(1 + \frac{1}{k} - (1 - p)^k \right).$$

Hvis $k = 4$, for hvilke verdier av p er den benyttede fremgangsmåten å foretrekke i stedet for å analysere blodprøvene enkeltvis med en gang?

Fasit

1. 0.1, 0.8, 0.78
2. 0.75, 0.896, 0.728
3. a) $\alpha^{1/2}$ b) 0.034
4. b) $p/(1 - (1 - p)^k)$ c) $p < 1 - (1/2)^{(1/2)} \approx 0.29$