Utledning av prediksjonsintervall

- Situasjon: Har $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $n(x; \mu, \sigma)$-populasjonen. Antar μ ukjent og σ^2 kjent. La $X_0 \sim n(x; \mu, \sigma)$ være resultatet av en fremtidig måling, uavhengig av $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- Ønsker et $(1 - \alpha) \cdot 100\%$-prediksjonsintervall for X_0

Utledning av prediksjonsintervall

- Situasjon: Har $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $n(x; \mu, \sigma)$-populasjonen. Antar μ ukjent og σ^2 kjent. La $X_0 \sim n(x; \mu, \sigma)$ være resultatet av en fremtidig måling, uavhengig av $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- Ønsker et $(1-\alpha) \cdot 100\%$-prediksjonsintervall for X_0
- Estimator for μ: $\widehat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim n\left(\bar{x}; \mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$
- Tar utgangspunkt i:

$$\bar{X} - X_0 \sim n\left(z; 0, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2}\right)$$

- Standardiserer:

$$Z = \frac{\bar{X} - X_0}{\sqrt{\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \sim n(z; 0, 1)$$

Utledning av prediksjonsintervall

- Standardiserer:

$$Z = \frac{\bar{X} - X_0}{\sqrt{\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \sim n(z; 0, 1)$$

Utledning av prediksjonsintervall

- Standardiserer:

$$Z = \frac{\bar{X} - X_0}{\sqrt{\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \sim n(z; 0, 1)$$

- Dermed har vi at:

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - X_0}{\sqrt{\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- Løser hver ulikhet mhp X_0, og setter sammen igjen

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq X_0 \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right) = 1 - \alpha$$

- $(1 - \alpha) \cdot 100\%$-prediksjonsintervall for X_0 er:

$$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right]$$

Tolkning av konfidensintervall og prediksjonsintervall

- Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $n(x; \mu, \sigma)$-populasjonen, der μ er ukjent og σ^2 kjent

- Konfidensintervall

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

- Prediksjonsintervall

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq X_0 \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right) = 1 - \alpha$$