Populasjon, utvalg og observator

- Populasjon: mengden av alle observasjoner man kan gjøre
  - normalpopulasjon
  - poissonpopulasjon
  - $f(x)$-populasjon
- Utvalg: delmengde av en populasjon
- Tilfeldig utvalg: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og identisk fordelte
- Observator: observerbar funksjon av SV (som er et tilfeldig utvalg)
  - gjennomsnitt, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- Utvalgsfordeling: sannsynlighetsfordelingen til en observator
  - fordeling for $\bar{X}$
- Normalplott: plott for å vurdere om observerte verdier $x_1, x_2, \ldots, x_n$ synes å komme fra en normalpopulasjon

Sentralgrenseteoremet

- Sentralgrenseteoremet: La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra fordeling med $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ og $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$. Da vil fordelingen til

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

konvergere mot en $n(z; 0, 1)$-fordeling når $n \to \infty$.

Sentralgrenseteoremet

- Sentralgrenseteoremet: La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra fordeling med $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ og $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$. Da vil fordelingen til

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

konvergere mot en $n(z; 0, 1)$-fordeling når $n \to \infty$.

  - når n er stor har vi dermed at

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \quad \approx \quad n(z; 0, 1)$$

Sentralgrenseteoremet

- Sentralgrenseteoremet: La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra fordeling med $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ og $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$. Da vil fordelingen til

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

konvergere mot en $n(z; 0, 1)$-fordeling når $n \to \infty$.

  - når n er stor har vi dermed at

$$\begin{aligned} Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \quad &\approx \quad n(z; 0, 1) \\ &\Updownarrow \\ \bar{X} \quad &\approx \quad n\left(\bar{x}; \mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) \end{aligned}$$

Sentralgrenseteoremet

- Sentralgrenseteoremet: La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra fordeling med $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ og $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$. Da vil fordelingen til

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

konvergere mot en $n(z; 0, 1)$-fordeling når $n \to \infty$.

  - når n er stor har vi dermed at

$$\begin{aligned} Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \quad &\approx \quad n(z; 0, 1) \\ &\Updownarrow \\ \bar{X} \quad &\approx \quad n\left(\bar{x}; \mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) \end{aligned}$$

  - unntatt for svært skjeve fordelinger har man en god approksimasjon når $n \geq 30$

Lineærkombinasjon av normalfordelte variabler

- Teorem: La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige og normalfordelte med forventingsverdier $\mathrm{E}[X_1] = \mu_1$, $\mathrm{E}[X_2] = \mu_2$, ..., $\mathrm{E}[X_n] = \mu_n$ og varianser $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma_1^2$, $\mathrm{Var}[X_2] = \sigma_2^2$, ..., $\mathrm{Var}[X_n] = \sigma_n^2$. La

$$Y = a_1 X_2 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$$

Da er Y normalfordelt med

$$\mathrm{E}[Y] = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n$$

og

$$\mathrm{Var}[Y] = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$$

- Bevis: Vi brukte momentgenererende funksjoner.

Lineærkombinasjon av normalfordelte variabler

- Teorem: La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige og normalfordelte med forventingsverdier $\mathrm{E}[X_1] = \mu_1$, $\mathrm{E}[X_2] = \mu_2$, ..., $\mathrm{E}[X_n] = \mu_n$ og varianser $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma_1^2$, $\mathrm{Var}[X_2] = \sigma_2^2$, ..., $\mathrm{Var}[X_n] = \sigma_n^2$. La

  $$Y = a_1X_2 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n + b$$

  Da er Y normalfordelt med

  $$\mathrm{E}[Y] = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n + b$$

  og

  $$\mathrm{Var}[Y] = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$$

- Bevis: Vi brukte momentgenererende funksjoner.