Utledning av konfidensintervall

- Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $f(x;\theta)$-populasjonen. Ønsker $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1) Estimator for θ: $\widehat{\theta}$
2) Sett $Z = h(\widehat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er en funksjon (uten andre ukjente parametre enn θ) slik at Z har en kjent sannsynlighetsfordeling (uten ukjente parametre).
3) Dermed har vi at

$$P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq h(\widehat{\theta}, \theta) \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

4) Løs hver ulikhet med hensyn på θ (hver for seg), og sett deretter de to ulikhetene sammen igjen med θ i midten slik at man får

$$P\left(\widehat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \widehat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = 1-\alpha.$$

5) Konkluder: Et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ er

$$\left[\widehat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n), \widehat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right].$$

Konfidensintervall for μ i normalfordeling (σ^2 kjent)

- Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $n(x; \mu, \sigma)$-popoulasjonen. Ønsker $(1-\alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1) Estimator for μ: $\widehat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
2) Har at $\bar{X} \sim n(\bar{x}, \mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}})$, og dermed
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z; 0, 1).$$
3) Har dermed at
$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$
4) Løser hver ulikhet med hensyn på μ og får
$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Konfidensintervall for μ i normalfordeling (σ^2 ukjent)

- Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $n(x;\mu,\sigma)$-popoulasjonen. Ønsker $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1) Estimator for μ: $\widehat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2) Har at $\bar{X} \sim n(\bar{x}, \mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}})$, og dermed

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z;0,1).$$

Siden σ^2 er ukjent erstatter vi den med en estimator for σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

Tar dermed utgangspunkt i

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

Hvilken fordeling har T? Først: Hvilken fordeling har S^2?

Regneregler for momentgenererende funksjoner

i) $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$

ii) $M_{aX}(t) = M_X(at)$

iii) La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige SV med momentgenererende funksjoner $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$ og la $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Da er

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).$$