χ^2-fordelingen

- En gammafordeling med $\alpha = \frac{\nu}{2}$ og $\beta = 2$ kalles en χ^2_ν-fordeling
- Sannsynlighetstettheten til en χ^2_ν-fordeling er

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

- Egenskaper:
  - Hvis $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}, X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}, \ldots, X_n \sim \chi^2_{\nu_n}$ er uavhengige har vi at

$$Y = X_1 + x_2 + \ldots + X_n \sim \chi^2_\nu \ \text{ med } \ \nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$$

  - $X \sim n(x;0,1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_1$

χ^2-fordelingen

- En gammafordeling med $\alpha = \frac{\nu}{2}$ og $\beta = 2$ kalles en χ^2_ν-fordeling
- Sannsynlighetstettheten til en χ^2_ν-fordeling er

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

- Egenskaper:
  - Hvis $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}, X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}, \ldots, X_n \sim \chi^2_{\nu_n}$ er uavhengige har vi at

$$Y = X_1 + x_2 + \ldots + X_n \sim \chi^2_\nu \quad \text{med} \quad \nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$$

  - $X \sim n(x;0,1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_1$
- Når $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er tilfeldig utvalg fra $n(x;\mu,\sigma)$-populasjonen viste vi at

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n \quad \text{og} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

Student t-fordeling

- En t_ν-fordeling har sannsynlighetstetthet

$$f(t;\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, -\infty < t < \infty$$

  - symmetrisk om 0
  - ligner på en $n(x;0,1)$-fordeling, men har tyngre haler

- Teorem: La $Z \sim n(z;0,1)$ og $V \sim \chi^2_\nu$ være uavhengige. Da er

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}} \sim t_\nu$$

Student t-fordeling

- En t_ν-fordeling har sannsynlighetstetthet

$$f(t;\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, -\infty < t < \infty$$

  - symmetrisk om 0
  - ligner på en $n(x;0,1)$-fordeling, men har tyngre haler
- Teorem: La $Z \sim n(z;0,1)$ og $V \sim \chi^2_\nu$ være uavhengige. Da er

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}} \sim t_\nu$$

- Når $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er tilfeldig utvalg fra $n(x;\mu,\sigma)$-populasjonen viste vi at

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{n-1}$$

og brukte dette til å utlede konfidensintervall for μ (når σ^2 ukjent)

Utledning av konfidensintervall

- Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $f(x;\theta)$-populasjonen. Ønsker $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1) Estimator for θ: $\widehat{\theta}$
2) Sett $Z = h(\widehat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er en funksjon (uten andre ukjente parametre enn θ) slik at Z har en kjent sannsynlighetsfordeling (uten ukjente parametre).
3) Dermed har vi at
$$P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq h(\widehat{\theta}, \theta) \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$
4) Løs hver ulikhet med hensyn på θ (hver for seg), og sett deretter de to ulikhetene sammen igjen med θ i midten slik at man får
$$P\left(\widehat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \widehat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = 1-\alpha.$$
5) Konkluder: Et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ er
$$\left[\widehat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n), \widehat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right].$$