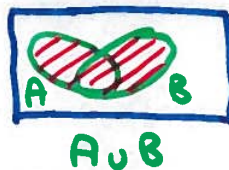
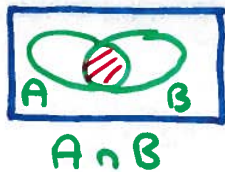


Hendelser og sannsynlighet

→ En hendelse er en delmengde av et utfallsrom

$$A \subseteq \mathcal{S} \quad \boxed{\textcircled{A}}^{\mathcal{S}}$$

→ Operasjoner på hendelser: snitt $\cap$ og union $\cup$



→ Sannsynlighet: P

- $0 \leq P(A) \leq 1$

- $P(\mathcal{S}) = 1$

- $A_1, A_2, \dots$ parvis disjunkte: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

[tenk på sanns. som areal i Venn-diagram]

→ Uniform sannsynlighetsmodell:

- $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

- $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$

- Dette medfører: $P(A) = \frac{|A|}{n}$

Telling av antall utfall

Kombinatorikk

$n!$ = $1 \cdot 2 \cdots n$ er antall måter å permutere (ordne) n elementer.

${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$ er antall ordnede utvalg når r elementer velges blant n uten tilbakelegging.

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{{}_nP_r}{r!} = {}_nC_r$ er antall ikke-ordnede utvalg når r elementer velges blant n uten tilbakelegging.

Regneregler for sannsynlighet

→ Additiv regel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



"opplogt fra Venn-diagram!"

• A, B disjunkte: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



→ Komplementærsetningen: $P(A) = 1 - P(A')$

→ Betinget sannsynlighet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

→ Multiplikasjonssetningen: $P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$

→ Uavhengighet: A, B uavhengige $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} P(A|B) = P(A)$

$$\bullet P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

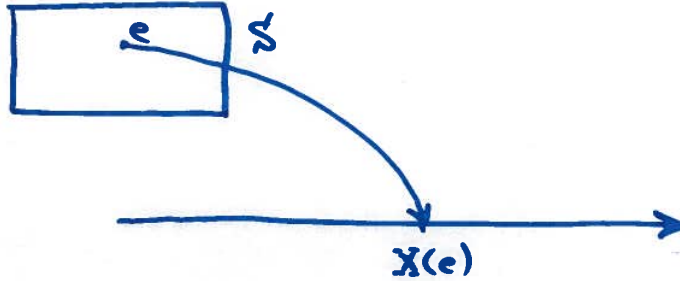
[→ Bayes regel: $P(A|B) = \frac{P(A) P(B|A)}{P(B)}$

→ Setning om total sanns.: $B_1, B_2, \dots, B_n$ partisjon av S

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)$$

Stokastisk variabel

→ En S.V. er en reell funksjon, X , definert på et utfallsrom



○ → Skiller mellom:

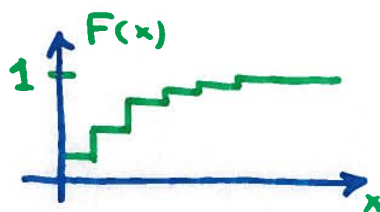
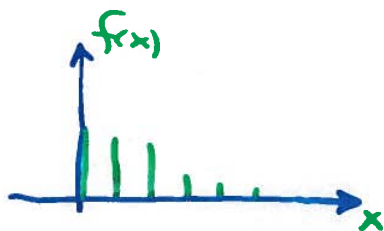
- diskret S.V.: antall verdier X kan ta er endelig eller tellbart uendelig.
- Kontinuerlig S.V.: antall verdier X kan ta er uendelig og ikke tellbart.

○ → Beskriver egenskaper til X ved:

- $f(x)$ $\leftarrow$ punktsannsynlighet - diskret
 $\leftarrow$ sannsynlighetstetthet - kontinuerlig
- $F(x) = P(X \leq x)$ - samme tolkning for både diskret og kontinuerlig tilfelle.

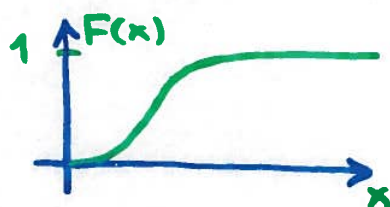
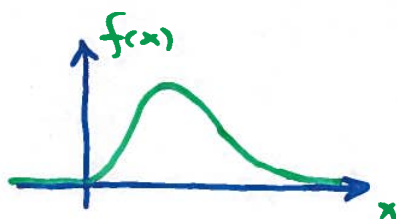
Sannsynlighetsfordelinger

→ diskret S.V. $f(x) = P(X=x)$ $F(x) = \sum_{u \leq x} f(u)$



→ kontinuerlig S.V. $\int_a^b f(x) dx = P(a \leq X \leq b)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



→ simultonfordeling: $f(x,y)$

• marginaelfordeling for X : $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$

• betinget fordeling: $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$

• X og Y er uafhængige S.V. dersom:

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$$

Forventningsverdi og varians

→ Forventningsverdi:

$$E[X] = \begin{cases} \sum x f(x) & , X \text{ diskret S.V.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & , X \text{ kont. S.V.} \end{cases}$$

- tolkning: gjennomsnitt av uendelig mange realisasjoner.
- regneregler: $E[\cdot]$ er en lineær operator

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$$

→ Varians: $Var[X] = E[(X - E[X])^2]$

- tolkning: måler spredning/ variasjon

- regneregler: $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$$

$$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X, Y]$$

→ Kovarians: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

- tolkning: kan tolke fortegnet

• X, Y uavhengige $\Rightarrow Cov[X, Y] = 0$

Viktige diskrete sanns. fordelinger

→ Binomisk fordeling:

- n uavhengige forsøk
- hvert forsøk gir suksess eller fiasko
- sanns. p for suksess i hvert forsøk.
- X : # suksess

trekning
av kuler
fra urne
med
tilbake-
legging

$$X \sim b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} ; x=0,1,\dots,n$$

→ Multinomisk fordeling: k mulige utfall i hvert forsøk

→ Hypergeometrisk fordeling:

- trekker n kuler fra urne uten tilbakelegging
- N kuler totalt, k røde, $N-k$ gule.
- X : # røde kuler trukket

$$X \sim h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} ; x=0,1,\dots,n$$

Viktige diskrete sanns. for.

→ Negativt binomisk fordeling:

- situasjon som for binomisk fordeling, men trekker inntil k suksesser, og X : # trekninger

$$X \sim b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}; x = k, k+1, \dots$$

→ Spesielt: $k=1$ - geometrisk fordeling

$$X \sim g(x; p) = (1-p)^{x-1} \cdot p; x = 1, 2, \dots$$

→ Poisson fordeling: X : # hendelser i tidsintervallet $[0, t]$; en poissonprosess

$$X \sim p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}; x = 0, 1, 2, \dots$$

1 Noen diskrete sannsynlighetsfordelinger

Binomisk fordeling

$$f(x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p), \quad M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n.$$

Poissonfordeling

$$f(x) = p(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \mu, \quad M_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)}.$$

Hypergeometrisk fordeling

$$f(x) = h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, \dots, \min(k, n).$$

$$E(X) = \frac{nk}{N}, \quad \text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{N} \cdot \left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

$M_X(t)$ har ikke et pent uttrykk.

Geometrisk fordeling

$$f(x) = g(x; p) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}.$$

Negativt binomisk fordeling

$$f(x) = b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad x = k, k+1, \dots$$

$$E(X) = \frac{k}{p}, \quad \text{Var}(X) = k \frac{1-p}{p^2}, \quad M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right)^k.$$

Spesialtilfelle: $k = 1$ gir geometrisk fordeling.

Binomisk fordeling

$$P(X \leq x)$$

n	x	p											
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
2	0	.902	.810	.722	.640	.562	.490	.360	.250	.160	.090	.040	.010
	1	.998	.990	.978	.960	.938	.910	.840	.750	.640	.510	.360	.190
3	0	.857	.729	.614	.512	.422	.343	.216	.125	.064	.027	.008	.001
	1	.993	.972	.939	.896	.844	.784	.648	.500	.352	.216	.104	.028
	2	1.000	.999	.997	.992	.984	.973	.936	.875	.784	.657	.488	.271
4	0	.815	.656	.522	.410	.316	.240	.130	.062	.026	.008	.002	.000
	1	.986	.948	.890	.819	.738	.652	.475	.313	.179	.084	.027	.004
	2	1.000	.996	.988	.973	.949	.916	.821	.688	.525	.348	.181	.052
	3	1.000	1.000	.999	.998	.996	.992	.974	.938	.870	.760	.590	.344
5	0	.774	.590	.444	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000
	1	.977	.919	.835	.737	.633	.528	.337	.187	.087	.031	.007	.000
	2	.999	.991	.973	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009
	3	1.000	1.000	.998	.993	.984	.969	.913	.813	.663	.472	.263	.081
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410
6	0	.735	.531	.377	.262	.178	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000
	1	.967	.886	.776	.655	.534	.420	.233	.109	.041	.011	.002	.000
	2	.998	.984	.953	.901	.831	.744	.544	.344	.179	.070	.017	.001
	3	1.000	.999	.994	.983	.962	.930	.821	.656	.456	.256	.099	.016
	4	1.000	1.000	1.000	.998	.995	.989	.959	.891	.767	.580	.345	.114
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.738	.469
7	0	.698	.478	.321	.210	.133	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000
	1	.956	.850	.717	.577	.445	.329	.159	.063	.019	.004	.000	.000
	2	.996	.974	.926	.852	.756	.647	.420	.227	.096	.029	.005	.000
	3	1.000	.997	.988	.967	.929	.874	.710	.500	.290	.126	.033	.003
	4	1.000	1.000	.999	.995	.987	.971	.904	.773	.580	.353	.148	.026
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.981	.938	.841	.671	.423	.150
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.992	.972	.918	.790	.522
8	0	.663	.430	.272	.168	.100	.058	.017	.004	.001	.000	.000	.000
	1	.943	.813	.657	.503	.367	.255	.106	.035	.009	.001	.000	.000
	2	.994	.962	.895	.797	.679	.552	.315	.145	.050	.011	.001	.000
	3	1.000	.995	.979	.944	.886	.806	.594	.363	.174	.058	.010	.000
	4	1.000	1.000	.997	.990	.973	.942	.826	.637	.406	.194	.056	.005
	5	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.950	.855	.685	.448	.203	.038
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.965	.894	.745	.497	.187
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.942	.832	.570

NB! Ikke tabell for geometrisk fordeling –
fordi vi ikke trenger det!

Approximasjoner for diskrete ford.

→ Hypergeometrisk $\approx$ binomisk hvis N er stor i forhold til k

- intuitivt opplegt
- kan vises matematisk

→ Binomisk $\approx$ poisson hvis n stor, p liten

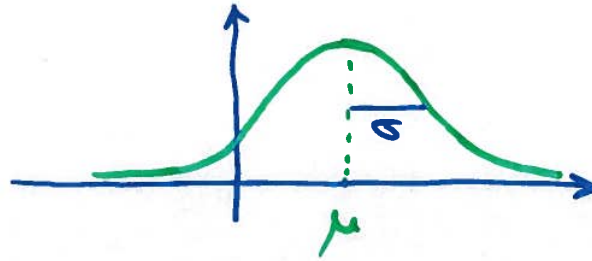
- intuitivt rimelig
- kan vises matematisk

→ Binomisk $\approx$ normal hvis n stor

- følger fra sentralgrenseteoremet.

Viktige kontinuerlige sanns. for.

→ Normalfordeling: $X \sim n(x; \mu, \sigma)$



- en lineær kombinasjon av uavhengige normalfordelte variabler er normalfordelt.

• $X \sim n(x; \mu, \sigma) \Leftrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim n(z; 0, 1)$

↑
trenger tabeller
kun for denne!

→ Eksponensiell fordeling:

- X : tid til første hendelse / tid mellom etterfølgende hendelser i en poisson prosess.

$$X \sim f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

→ Gamma-fordeling $X \sim f(x; \alpha, \beta) = \dots$

- $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{\lambda}$: eksponensiell fordeling

- $\alpha = \frac{\nu}{2}, \beta = 2$: χ^2_ν

Diskret uniformfordeling

$$f(x) = \frac{1}{k}, \quad x = x_1, \dots, x_k.$$

$$E(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2, \quad M_X(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{x_i t}.$$

Multinomisk fordeling

$$f(x_1, \dots, x_k; p_1, \dots, p_k, n) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}, \quad \text{der } \sum_{i=1}^k x_i = n \text{ og } \sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

$$E(X_i) = np_i, \quad \text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i), \quad \text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j \text{ for } i \neq j.$$

Spesialtilfeller: For $k = 2$ er X_1 binomisk fordelt og for $k = 3$ sies (X_1, X_2) å være trinomisk fordelt.

2 Noen kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

Normalfordeling (Gaussfordeling)

$$f(x) = n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2, \quad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}.$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Eksponensialfordeling

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0.$$

$$E(X) = \beta, \quad \text{Var}(X) = \beta^2, \quad M_X(t) = \frac{1}{1 - \beta t} \text{ for } t < \frac{1}{\beta}.$$

Kommentar: Ofte vanlig å bruke parameteren $\lambda = 1/\beta$.

NB! Har ikke tabell for denne - fordi vi ikke trenger det!

Transformasjoner av S.V.

→ Her gitt $X \sim f(x)$

$$Y = u(X) \Leftrightarrow X = w(Y)$$

• da har vi et

$$g(y) = f(w(y)) \quad \text{hvis } X, Y \text{ diskret}$$

$$g(y) = f(w(y)) \cdot |w'(y)| \quad \text{hvis } X, Y \text{ kont.}$$

4 Noen resultater for funksjoner av stokastiske variable

Transformasjonsformelen

En variabel:

La $Y = u(X)$, der funksjonen u er strengt monoton og deriverbar for alle verdier av argumentet. La $X = u^{-1}(Y) = w(Y)$. Hvis X er kontinuerlig fordelt vil også Y være det. La $f(x)$ være sannsynlighetstettheten til X og la $g(y)$ være sannsynlighetstettheten til Y . Vi har da sammenhengen

$$g(y) = f(w(y)) \cdot |w'(y)|.$$

To variable:

La $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ og $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$, der funksjonene u_1 og u_2 er strengt monotone og deriverbare for alle verdier av argumentene. La $X_1 = w_1(Y_1, Y_2)$ og $X_2 = w_2(Y_1, Y_2)$. Hvis (X_1, X_2) er kontinuerlig fordelt vil også (Y_1, Y_2) være det, og vi har

$$g(y_1, y_2) = f(w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)) \cdot |J|$$

der J er determinanten til Jacobi-matrisen, $J = \begin{vmatrix} \partial w_1 / \partial y_1 & \partial w_1 / \partial y_2 \\ \partial w_2 / \partial y_1 & \partial w_2 / \partial y_2 \end{vmatrix}$.

Lineærkombinasjoner

La $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$. Da er

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b,$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Fordeling til lineærkombinasjoner

La $X_1, \dots, X_n$ være uavhengige variable.

Dersom X_i er normalfordelt med forventning μ_i og varians σ_i^2 vil $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ være normalfordelt med forventning $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ og varians $\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$.

Dersom X_i er binomisk fordelt med parametre m_i og p vil $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ være binomisk fordelt med parametre $\sum_{i=1}^n m_i$ og p .

Dersom X_i er Poissonfordelt med parameter μ_i vil $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ være Poissonfordelt med parameter $\sum_{i=1}^n \mu_i$.

Dersom X_i er χ^2 -fordelt med ν_i frihetsgrader vil $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ være χ^2 -fordelt med $\sum_{i=1}^n \nu_i$ frihetsgrader.

Ekstremvariable

→ Anta $X_1, X_2, \dots, X_n$ tilfældig udvalg fra $f(x)$

- $V = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$
- $F_V(u) = P(V \leq u) = P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq u)$
 $= P(X_1 \leq u \cap X_2 \leq u \cap \dots \cap X_n \leq u)$
 $= P(X_1 \leq u) \cdot P(X_2 \leq u) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq u)$
 $= F_X(u) \cdot F_X(u) \cdot \dots \cdot F_X(u) = (F_X(u))^n$
- $f_V(u) = \frac{d}{du} [F_V(u)] = \dots$

- $U = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

- tilsvarende fås $F_U(u)$ og $f_U(u)$

- $X_{(k)} = k'$ te minste af $X_1, X_2, \dots, X_n$

- Kan også finde $F_{X_{(k)}}(x)$ og $f_{X_{(k)}}(x)$

Momentgenererende funksjoner

→ $M_X(t) = E[e^{t^T X}]$

→ Regneregler:

- $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$

- $M_{aX}(t) = M_X(at)$

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ uavh.

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$$

→ Egenskaper:

- $M_X^{(r)}(0) = E[X^r]$

- Samns. for. for X og Y er like hvis og bare hvis $M_X(t) = M_Y(t)$ for alle t .

Estimatore

→ $X_1, X_2, \dots, X_n$ er et tilfeldig utvalg fra $f(x)$ -populasjonen betyr at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige og $X_i \sim f(x)$

→ Observator: En funksjon av S.V. er en observator

→ En observator kan benyttes til å estimere verdien til en ukjent parameter.

• parameter: $\theta, \mu, \lambda, \rho$

• estimator: $\hat{\theta}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{\rho}$

Sannsynlighetsmaksimering

Idé: Maksimer sanns. for å observere det man har observert

Typisk: • $X_1, X_2, \dots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $f_X(x; \theta)$
[Husk: vi har sett eksempler hvor $n=1$]

- Rimelighetsfunksjonen

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta)$$

- Triks: ta logaritmen

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f_X(x_i; \theta)$$

- Maksimer $l(\theta)$, vanligvis ved å derivere.

To viktige egenskaper for estimatorer

Hvordan evaluere "godheten" til en estimator?

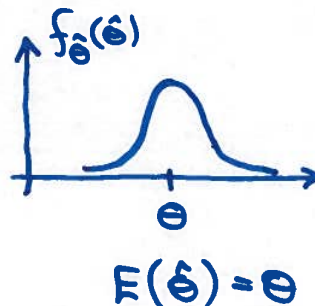
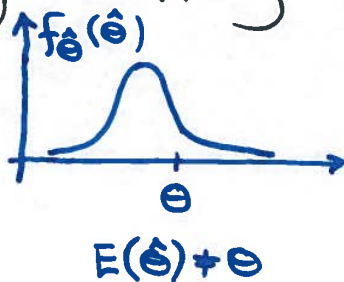
Hvis vi har to estimatorer, hvilken er best?

→ Analogi: Skyte på blink.

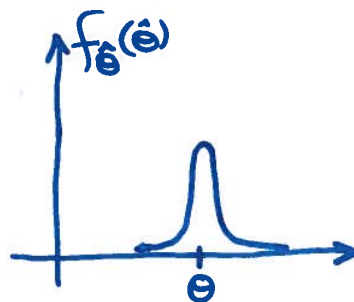
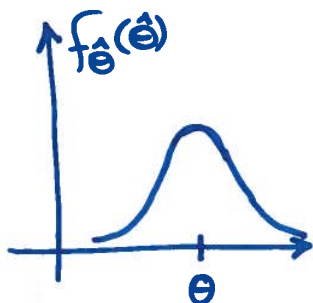
- for å få et godt resultat må man
 - ha et gevær som er riktig innskutt
 - være en god skytter

→ For estimatorer: Tenker oss at vi gjentar forsøket mange ganger.

- gevær riktig innskutt



- god skytter



Intervallestimering/Konfidensintervall

→ En punktestimator $\hat{\theta}$ angir vårt beste "gjett" på verdien til parameteren θ . Angir intet om hvor (u)sikker vi er!

→ La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra $f_X(x; \theta)$.

○ Et konfidensintervall $[\hat{\theta}_L(x_1, \dots, x_n), \hat{\theta}_U(x_1, \dots, x_n)]$ er laget slik at

$$P(\hat{\theta}_L(x_1, \dots, x_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(x_1, \dots, x_n)) = 1 - \alpha$$

- Hva betyr dette?

- Husk tolkning av sannsynlighet!

- Tenker oss at vi gjentar forsøket mange ganger.

 - θ er et tall (ukjent, men ikke stokastisk)

 - intervallgrensene er stokastiske.

Hvordan regne ut et konfidensintervall

- Eksempel: La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$

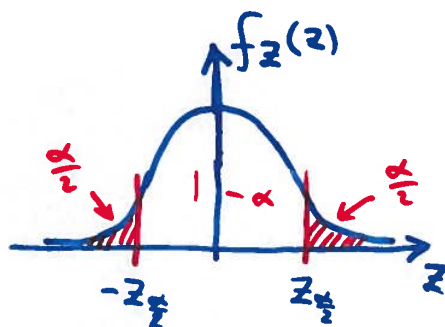
- estimator for μ : $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- her $E[\hat{\mu}] = \mu$, $\text{Var}[\hat{\mu}] = \frac{\sigma^2}{n}$, $\hat{\mu}$ normalfordelt

$$\therefore \hat{\mu} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$\Downarrow$

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$



$$\therefore P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\hat{\mu} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \geq \mu$$

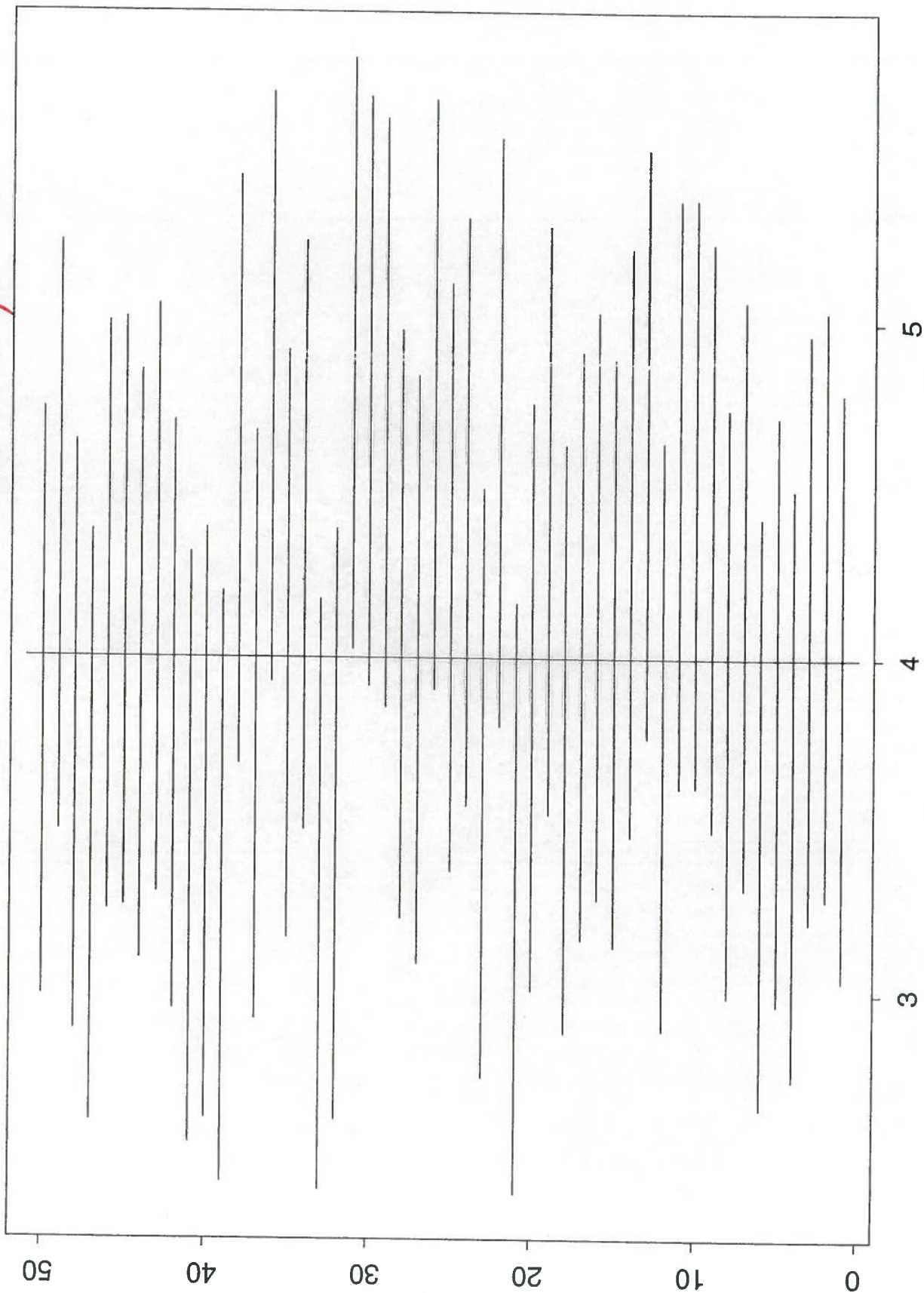
$$\mu \geq \hat{\mu} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$P\left(\hat{\mu} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) ; X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$\mu = 4, \sigma^2 = 2, n = 20$$

95% - Konf. int. for μ .



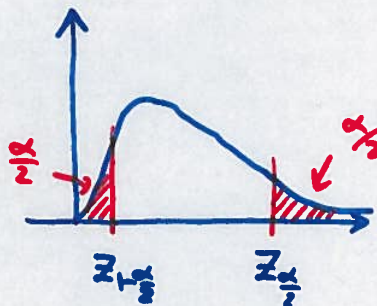
- Generelt: La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra $f_X(x; \theta)$.

- estimator for θ : $\hat{\theta}$

- finn/bestem en $Z = g(\hat{\theta}, \theta)$ slik at

- Z har en kjent fordeling

- sanns ford. til Z inneholder ingen ukjente parametre.



$$P(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq g(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

løs hver ulikhet m.h.p. θ og sett sammen igjen til

$$P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$$

Hvis vi synes intervallet vort blir for langt, hva kan vi gjøre?

Hypotesetesting

Eks: Skal teste ny medisin

- Gammel medisin, A: god virkning på 60% av pasientene, $p_A = 0.6$
- Ny medisin, B: påstås å ha god virkning på mer enn 60% av pasientene, påstand $p_B > 0.6$

Problem: Er B virkelig bedre enn A?

Forsøk: Gir medisin B til $n=20$ tilfeldig valgte pasienter. Lar X være antall av disse som får god virkning av medisinen

Vi har da: $X \sim \text{binomisk}(n, p_B)$, p_B ukjent

Anta vi observerer: $x=15$, dvs. $\hat{p}_B = \frac{x}{n} = 0.75$.

Kan vi fra dette påstå at B er bedre enn A?

Kommentarer: forenklet i forhold til virkeligheten

- n er som oftest større i virkelige forsøk.
- må ta hensyn til placebo-effekten.
- blindforsøk.
- ...

→ To hypoteser/to mulige sannheter:

$$H_0: p_B = 0.6 \quad \text{mot} \quad H_1: p_B > 0.6$$

→ To mulige konklusjoner/beslutninger:

- forkast H_0 , dvs. ta ny medisin i bruk.
- forkast ikke H_0 , dvs. fortsett med medisin A.

→ Mulige resultat:

	H_0 riktig	H_1 riktig
Forkast H_0	Type I-feil	OK
Forkast ikke H_0	OK	Type II-feil

→ Rikelig å forkaste H_0 dersom $X \geq k$

↑
gjensvar å velge
denne

→ Kan ikke gardere oss mot feil beslutninger, men kan gjøre sannsynligheten for å foreta en feil beslutning liten.

→ Type I-feil: Forkast H_0 når H_0 er riktig.

$$\alpha = P(\text{Type I-feil}) = P(X \geq k \text{ når } p_0 = 0.6) = P(X \geq k | p_0 = 0.6)$$

$$= \sum_{x=k}^{20} \binom{20}{x} 0.6^x (1-0.6)^{20-x}$$

↑
NB! ikke en
betinget
sannsynlighet

∴ jo større k desto mindre α

→ Type II-feil: Forkast ikke H_0 når H_1 er riktig.

$$\beta = P(\text{Type II-feil}) = P(X < k | p_0 > 0.6)$$

$$= \sum_{x=0}^{k-1} \binom{20}{x} p_0^x (1-p_0)^{20-x}$$

Merk: β blir en funksjon av både k og p_0 .

∴ jo mindre k desto mindre β

→ Vi må velge hva som er viktigst, å ha α liten eller å ha β liten.

→ I vårt eksempel:

- Type I-feil: Ta i bruk ny medisin selv om den ikke er bedre enn den gamle.
- Type II-feil: Ikke ta i bruk ny medisin selv om den faktisk er bedre enn den gamle.

→ Analogi: dømme en tiltalt i retten.

→ Prinsipp: Det skal være "bevist" før vi påstår at H_1 er riktig ut fra dataene.
Velger derfor α liten (typisk $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$ eller $\alpha = 0.10$).

→ I vårt eksempel: $P(X \geq 17 \mid p_0 = 0.6) = 0.0159$
 $P(X \geq 18 \mid p_0 = 0.6) = 0.0509$

- Hvis vi velger $\alpha = 0.05$ blir beslutningsregelen:

Forkast H_0 dersom $X \geq 17$.

→ Hva betyr det at

$$\alpha = P(\text{Forkast } H_0 \mid H_0 \text{ riktig}) = 0.05 ?$$

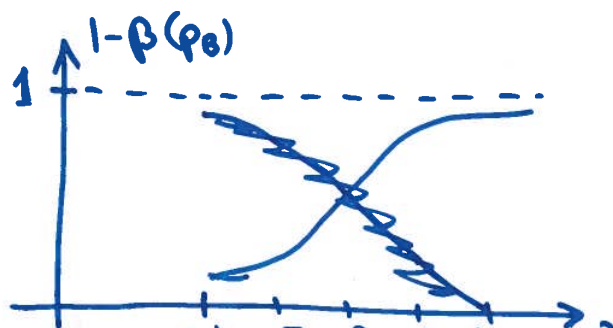
- tenker oss at vi gjentar forsøket mange ganger og at H_0 er riktig.
- i 5% av disse gangene vil vi beslutte å ta ny medisin i bruk.

→ Hvor god er en slik test?

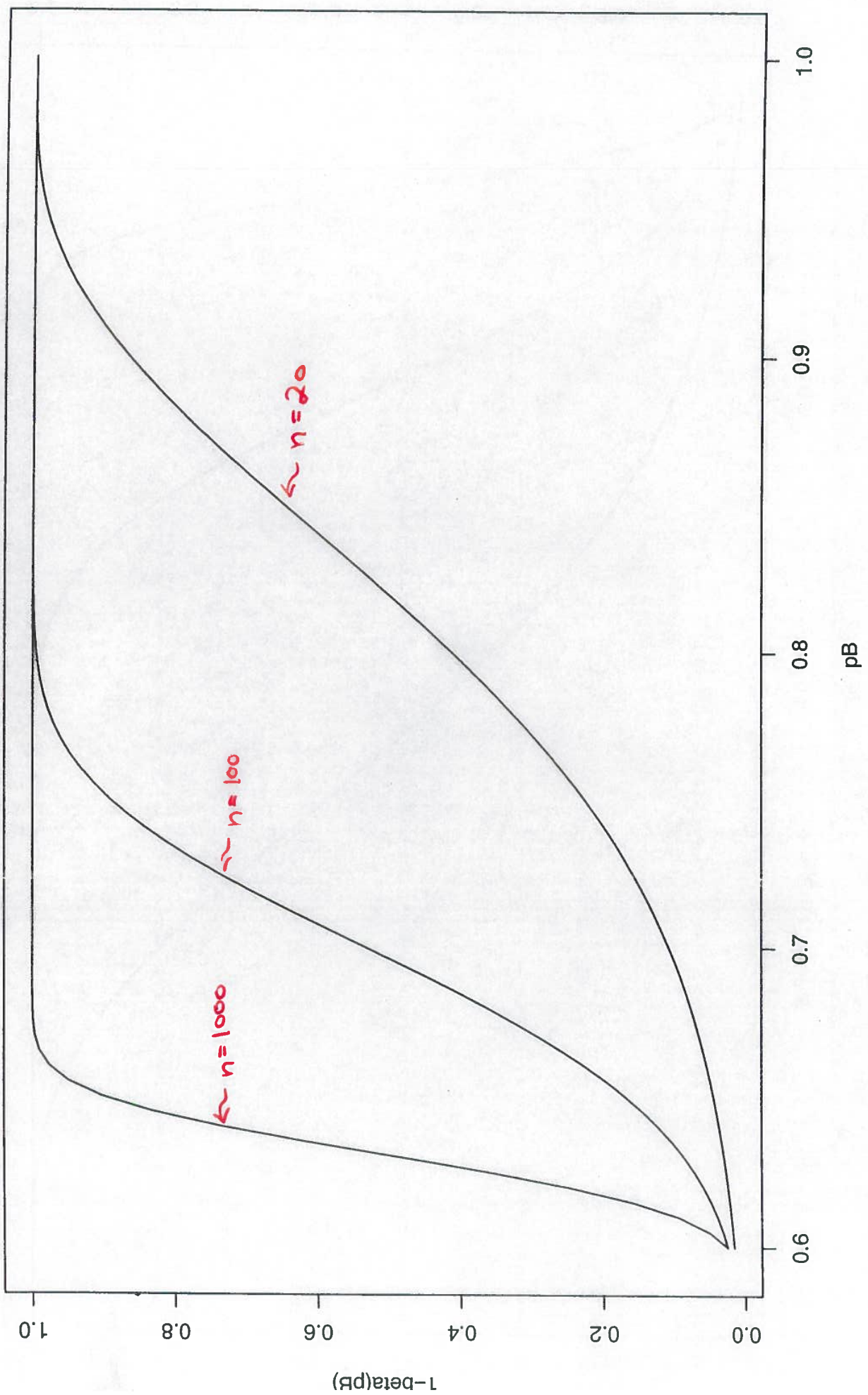
- må se på $\beta = P(\text{Forkast ikke } H_0 \mid H_1 \text{ riktig})$
- ser vanligvis i stedet på

$$1 - \beta = P(\text{Forkast } H_0 \mid H_1 \text{ riktig})$$

$$= P(X \geq 17 \mid p_0 = 0.6) \leftarrow \text{NB! blir en funksjon av } p_0$$



Hvordan gjøre testen bedre?



p-verdi

→ p-verdi: En p-verdi assosiert til en test-observator Z er lik sannsynligheten for at Z er lik eller er mer ekstrem enn den observerte verdien til Z , når H_0 er riktig.

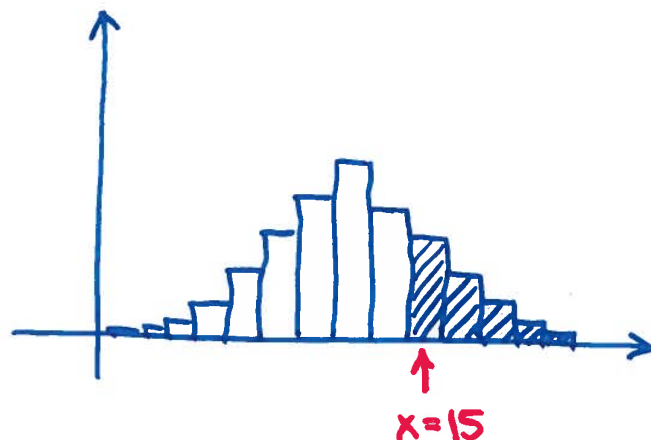
→ Eks: Testing av ny medisin $n=20, x=15$

- testobservator: X
- observert verdi for testobserv. $x=15$
- mer ekstrem betyr her: ($H_0: p_B = 0.6$, $H_1: p_B > 0.6$)

$$X \geq 15$$

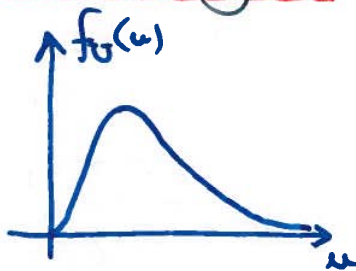
• dermed

$$p = P(X \geq 15 | H_0 \text{ riktig})$$



"Nye" sannsynlighetsfordelinger

→ χ^2 -fordeling



• $U \sim \chi_n^2, V \sim \chi_m^2$ uavh. $\Rightarrow U + V \sim \chi_{n+m}^2$

• $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$

- $\sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_n^2 \rightarrow$ konf. int./hyp. test for σ^2 når μ er kjent.

- $\sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i - \bar{Z}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2 \rightarrow$ konf. int./hyp. test for σ^2 når μ er ukjent.

→ Student t -fordeling

• $Z \sim N(0,1), V \sim \chi_n^2$ uavh.

$$\Rightarrow T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim t_n$$

• $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$

$$T = \frac{\bar{Z} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t_{n-1}$$

Konfidensintervall/hypotesetesting

→ Hvilke ideer/fordelinger har vi sett på i forelesning?

→ Normalfordeling:

- Ett-utvalg, normalpopulasjon, μ ukjent, σ^2 kjent

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z; 0, 1)$$

- Ett-utvalg, bruk av sentralgrenseteoremen

- Appraksimasjon av binomisk til normal

- To-utvalg, μ_1, μ_2 ukjent, σ_1^2, σ_2^2 kjent

→ t-fordeling

- Ett-utvalg, normalpopulasjon, både μ og σ^2 ukjente, inferens om μ

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t_{n-1}$$

- To-utvalg, normalpopulasjon, μ_1, μ_2 ukjente, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ukjent, inferens om μ

→ χ^2 -fordeling

- Ett-utvalg, normalpopulasjon, både μ og σ^2 ukjente, inferens om σ^2 .

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

→ Dere har sett andre eksempler på øvinger!

Hva "mangler" i denne repetisjonen?

- Regresjon
- Detaljer - utledninger
- Regning på konkrete situasjoner —
dette er det dere blir testet
på på eksamen!