Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 2
Løsningsskisse

Oppgave 1

a) Antall måter å velge ut k elementer fra en populasjon på n er gitt av binomialkoeffisienten

$$\binom{n}{k}.$$

Her har vi $n = 20$ kniver, og skal velge ut $k = 4$ av dem. Antall måter dette kan gjøres på er altså

$$\binom{n}{k} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \underline{\underline{4845}}.$$

b) Her spørres det etter sannsynligheten for at samtlige kniver i et tilfeldig utvalg på fire, har både hvitt skaft og rustfritt blad. For å finne denne sannsynligheten trenger vi å vite hvor mange av de totalt 20 knivene i skuffen som har begge egenskapene, altså hvor mange av knivene som er "gunstige". Deler vi knivene inn i grupper med utgangspunkt i hvorvidt de har hvite skaft (H) og rustfrie blader (R), får vi fire ulike knivtyper:

- RH: Både rustfritt blad og hvitt skaft,
- RH': Rustfritt blad, men ikke hvitt skaft,
- $R'H$: Ikke rustfritt blad, men hvitt skaft, og
- $R'H$': Verken rustfritt blad eller hvitt skaft.

La #RH betegne antall kniver med både rustfritt blad og hvitt skaft, og tilsvarende for RH', RH' og R'H'. Fra oppgaveteksten vet vi at:

- $\#RH + \#RH' + \#R'H + \#R'H' = 20$,
- $\#RH + \#R'H = 10$,
- $\#RH + \#RH' = 8$
- $\#R'H' = 6$

Løser vi likningssystemet får vi

$$\begin{aligned}
\#RH + \#RH' + \#R'H &= 20 - 6 = 14 \\
\#RH &= (\#RH + \#RH') + (\#RH + \#R'H) - (\#RH + \#R'H + \#RH') \\
&= 8 + 10 - 14 = 4 \\
\#R'H &= (\#RH + \#R'H) - \#RH = 10 - 4 = 6 \\
\#RH' &= (\#RH + \#RH') - \#RH = 8 - 4 = 4
\end{aligned}$$

Vi vil regne ut sannsynligheten for å trekke fire kniver med hvitt skaft og rustfritt blad som forholdet mellom antall gunstige utfall og antall mulige utfall. Antall mulige utfall er lik antall ulike måter å velge ut fire kniver fra en populasjon på 20, altså svaret fra deloppgave **a)**, $m = 4845$. Siden utvalgsstørrelsen er fire, og det bare finnes fire "gunstige" kniver, er antall gunstige utfall i dette tilfellet

$$g = \binom{4}{4} = 1.$$

Sannsynligheten for å trekke fire kniver med hvitt skaft og rustfritt blad er dermed

$$P(4 \text{ stk } RH) = \frac{g}{m} = \frac{1}{4845} = \underline{\underline{0.0002}}.$$

c) Antall mulige utfall er det samme som over, altså

$$m = \binom{20}{4} = 4845.$$

For at et utfall skal være gunstig, må vi her trekke én av de $\#RH = 4$ knivene med både hvitt skaft og rustfritt blad, hvilket kan gjøres på

$$g_1 = \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$$

forskjellige måter. Videre må vi trekke to av de $\#R'H' = 6$ knivene med verken hvitt skaft eller rustfritt blad. Antall måter å gjøre det på er

$$g_2 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15.$$

Den siste kniven i utvalget kan ikke tilhøre noen av disse kategoriene, for da ville det ikke vært "akkurat 1" og "akkurat 2" av de to første typene. Den siste kniven må derfor være blant de

$$\#R'H + \#RH' = 6 + 4 = 10$$

knivene som enten har hvitt skaft men ikke rustfritt blad, eller har rustfritt blad men ikke hvitt skaft. Dette kan gjøres på

$$g_3 = \binom{10}{1} = \frac{10!}{1!(10-1)!} = 10$$

ulike måter. Antall måter å trekke et utvalg på fire kniver som oppfyller alle tre betingelsene på en gang, blir da ifølge produktsetningen

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 = 4 \cdot 15 \cdot 10 = 600.$$

Sannsynligheten for å trekke et utvalg som oppfyller de gitte betingelsene er altså

$$P(1 \text{ stk } RH,\, 2 \text{ stk } R'H') = \frac{g}{m} = \frac{600}{4845} = \underline{\underline{0.1238}}.$$

Oppgave 2 Vi antar at vi har å gjøre med en vanlig kortstokk, bestående av 52 unike kort, hvor hvert kort tilhører en av fire farger (hjerter, ruter, spar, kløver), og har en av 13 verdier (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K). Når vi skal beregne sannsynligheten for å få delt ut ulike pokerhender, trenger vi totalt antall mulige hender, altså antall mulige utvalg av fem kort, som er

$$m = \binom{52}{5} = 2\,598\,960.$$

a) For å få ett par må man få to kort med samme verdi og tre kort med ulike andre verdier. Verdien til paret kan velges på $\binom{13}{1}$ måter, og fargene til de to kortene i paret kan velges på $\binom{4}{2}$ måter. Merk at vi ikke inkluderer muligheten for at de to kortene har samme farge, siden det bare er ett kort i hver farge med den valgte verdien. De tre siste kortene kan ikke ha samme verdi som paret, og må ha tre ulike verdier, slik at vi ikke får to par eller fullt hus. Etter at verdien til paret er valgt, er det 12 "ubrukte" verdier igjen. Verdiene til de tre siste kortene kan velges blant disse på $\binom{12}{3}$ ulike måter. Fargen til hvert av disse kortene kan så velges på $\binom{4}{1}$ måter. Antall hender med akkurat ett par er, ved produktsetningen,

$$g(\text{Ett par}) = \binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3 = 13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 4^3 = 1\,098\,240.$$

Sannsynligheten for å få ett par er derfor

$$P(\text{Ett par}) = \frac{g(\text{Ett par})}{m} = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.4226}}.$$

b) Fullt hus tilsvarer ett par og tress på en gang, altså tre kort med én farge, og to kort med en annen farge. Vi kan velge verdien til de tre like kortene på $\binom{13}{1}$ måter, og fargene deres på $\binom{4}{3}$ måter. Etter det er det 12 verdier igjen, så vi kan velge verdien til paret på $\binom{12}{1}$ måter. Til slutt kan fargene til paret velges på $\binom{4}{2}$ måter. Antall hender med fullt hus er

$$g(\text{Fullt hus}) = \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2} = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744,$$

så sannsynligheten for fullt hus blir

$$P(\text{Fullt hus}) = \frac{g(\text{Fullt hus})}{m} = \frac{3744}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.0014}}.$$

c) En royal straight flush er en straight flush med ess (A) som høyeste kort. Av de $g(\text{Straight flush}) = 40$ måtene å få straight flush på, er det fire (én for hver farge) som også er royal straight flush. Antall måter å få royal straight flush på er derfor

$$g(\text{Royal straight flush}) = 4.$$

Sannsynligheten for å få en royal straight flush er

$$P(\text{Royal straight flush}) = \frac{g(\text{Royal straight flush})}{m} = \frac{4}{2\,598\,960} = \underline{\underline{0.0000015}}.$$

Oppgave 3

Vi definerer tre aktuelle hendelser:

- M: den tilfeldig valgte personen er mann,
- K: den tilfeldig valgte personen er kvinne,
- F: den tilfeldig valgte personen er fargeblind.

Oppgaveteksten gir oss da at vi har følgende sannsynligheter,

- $P(M) = 0.5$,
- $P(K) = 0.5$,
- $P(F|M) = 0.05$,
- $P(F|K) = 0.0025$.

Vi finner sannsynligheten $P(M|F)$ for at en person er mann, gitt at vedkommende er fargeblind;

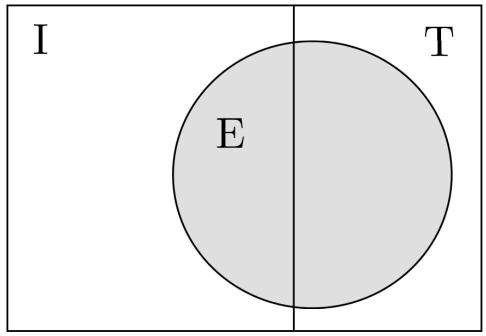
$$\begin{aligned} P(M|F) &= \frac{P(M \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(M)\,P(F|M)}{P(M)\,P(F|M) + P(K)\,P(F|K)} \\ &= \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.5 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.0025} = \underline{\underline{0.952}}, \end{aligned}$$

der vi først har benyttet definisjonen av betinget sannsynlighet, deretter multiplikasjonssetningen for $P(M \cap F)$ og setningen om total sannsynlighet for $P(F)$, og til slutt satt inn de oppgitte sannsynlighetene og regnet ut tallsvar.

Oppgave 4

For en tilfeldig valgt person som turisten støter på, definerer vi de tre hendelsene

- I: personen er innfødt,



Figur 1: Venndiagram for hendelsene I, T og E.

- T: personen er turist,
- E: personen snakker engelsk.

Opplysningene i oppgaveteksten kan da formuleres som følger.

- Hver tiende innfødte snakker engelsk: $P(\mathrm{E}|\mathrm{I}) = 1/10$,
- hver femte person han møter er turist: $P(\mathrm{T}) = 1/5$,
- annenhver turist snakker engelsk: $P(\mathrm{E}|\mathrm{T}) = 1/2$.

a) Vi antar at alle personene turisten møter enten er innfødte, eller er turister selv. Da er I og T komplementære hendelser, slik at

$$P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{T}) = 1 \quad \text{og} \quad P(\mathrm{I}) = 1 - P(\mathrm{T}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

I venndiagrammet i figur 1 er dette illustrert ved å dele opp rektangelet som representerer hele utfallsrommet i to deler. Siden vi har engelsktalende både blant de innfødte og blant turistene, plasserer vi regionen som representerer E slik at den overlapper både I og T.

b) Sannsynligheten for at en tilfeldig person turisten møter er engelsktalende, er gitt ved loven om total sannsynlighet,

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}) &= P(\mathrm{E} \cap \mathrm{I}) + P(\mathrm{E} \cap \mathrm{T}) \\ &= P(\mathrm{E}|\mathrm{I})P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{E}|\mathrm{T})P(\mathrm{T}) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{9}{50}}}. \end{aligned}$$

c) For å finne den betingede sannsynligheten for at en person er innfødt, gitt at vedkommende snakker engelsk, bruker vi definisjonen av betinget sannsynlighet, samt sannsynligheten $P(\mathrm{E})$ fra **b)**,

$$P(\mathrm{I}|\mathrm{E}) = \frac{P(\mathrm{I} \cap \mathrm{E})}{P(\mathrm{E})} = \frac{P(\mathrm{E}|\mathrm{I})P(\mathrm{I})}{P(\mathrm{E})} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{9}{50}} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}.$$