TMA4240 Statistikk
Høst 2018

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 3
Løsningsskisse

Oppgave 1

Den tilfeldige variabelen X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{dersom } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

Den kumulative fordelingsfunksjonen F er lik det bestemte integralet av sannsynlighetstetttheten f fra $-\infty$ til x. Siden $f(x) = 0$ for $x \leq 0$ setter vi 0 som nedre grense for integralet,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x nt^{n-1}dt = [t^n]_0^x = \underline{\underline{x^n}}.$$

Fordelingsfunksjonen $F(x)$ gir sannsynligheten for at $X \leq x$, og kan brukes til å finne sannsynligheten for at $1/4 < X \leq 3/4$,

$$P\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4}\right) = P\left(X \leq \frac{3}{4}\right) - P\left(X \leq \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Setter vi inn $n = 1$ får vi

$$P\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4}; n = 1\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}},$$

og med $n = 2$ får vi

$$P\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4}; n = 2\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

For å bestemme medianen til X setter vi $P(X \leq a) = F(a) = 1/2$, slik at

$$F(a) = a^n = \frac{1}{2}.$$

Medianen er altså

$$a = \begin{cases} 1/2 & \text{dersom } n = 1 \\ \sqrt{2}/2 & \text{dersom } n = 2 \end{cases}.$$

Forventningsverdien til X er lik integralet av $xf(x)$ fra $-\infty$ til ∞,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xnx^{n-1}dx \\ &= \int_0^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1} = \begin{cases} 1/2 & \text{dersom } n = 1 \\ 2/3 & \text{dersom } n = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Med $n = 1$ er medianen og forventningsverdien identiske, men med $n = 2$ er medianen størst ($\sqrt{2}/2 \approx 0.71 > 2/3$).

Oppgave 2

Sannsynlighetstetthetsfunksjonen

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^2) & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

er oppgitt. Normaliseringskonstanten k bestemmer vi ved å bruke at integralet av $f(x)$ fra $-\infty$ til ∞ må være lik 1 for at $f(x)$ skal være en sannsynlighetstetthet. Vi må altså ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 1.$$

Verdien av integralet er

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = k[x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = k(1 - \tfrac{1}{3} - (-1 + \tfrac{1}{3})) = \tfrac{4}{3}k.$$

For at dette skal være lik 1 må vi ha $\underline{\underline{k = 3/4}}$. Sannsynlighetstettheten er illustrert i figur 1. Sannsynligheten for at $X \leq 0.6$ finner vi ved å integrere tettheten fra -1 til 0.6,

$$P(X \leq 0.6) = \int_{-1}^{0.6} \tfrac{3}{4}(1-x^2)dx = \tfrac{3}{4}[x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-1}^{0.6} = \tfrac{3}{4}(0.6 - 0.04167 - (-1 + 0.3333)) = \underline{\underline{0.8960}}$$

Sannsynligheten for at $X \leq 0.8$ gitt at $X > 0.6$ finner vi fra definisjonen av betinget sannsynlighet,

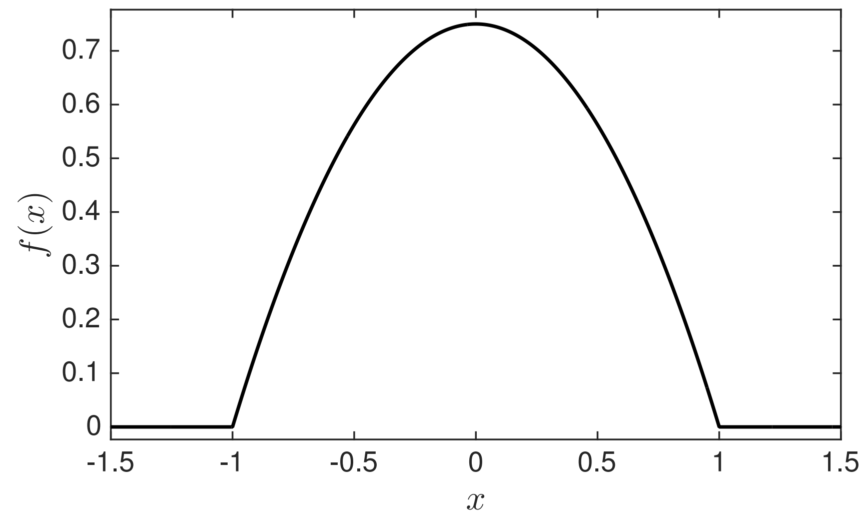
$$P(X \leq 0.8 | X > 0.6) = \frac{P(X \leq 0.8 \cap X > 0.6)}{P(X > 0.6)} = \frac{P(0.6 < X \leq 0.8)}{P(X > 0.6)}. \tag{2.1}$$

Sannsynligheten i telleren er

$$P(0.6 < X \leq 0.8) = \int_{0.6}^{0.8} \tfrac{3}{4}(1-x^2)dx = \tfrac{3}{4}[x - \tfrac{1}{3}x^3]_{0.6}^{0.8} = \tfrac{3}{4}(0.629 - 0.528) = 0.0757,$$

og den i nevneren er

$$P(X > 0.6) = 1 - P(X \leq 0.6) = 1 - 0.8960.$$



Figur 1: Grafen til sannsynlighetstettheten $f(x)$ for $-1.5 \leq x \leq 1.5$.

Setter vi disse to sannsynlighetene inn i (2.1) får vi

$$P(X \leq 0.8 | X > 0.6) = \frac{0.0757}{1 - 0.8960} = \underline{\underline{0.728}}.$$

Oppgave 3

Forventningsverdien til X er lik summen av $xf(x)$ for alle mulige verdier av x,

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=-2}^{2} xf(x) = -2 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = \underline{\underline{0.1}}.$$

Sannsynligheten for at $X \geq 0$ finnes ved å summere punktsannsynlighetene til alle enkeltutfallene x som oppfyller $x \geq 0$, altså 0, 1 og 2,

$$P(X \geq 0) = f(0) + f(1) + f(2) = \underline{\underline{0.8}}.$$

Den betingede sannsynligheten for at $X \geq 0$ gitt at $X \leq 1$ finnes utfra definisjonen av betinget sannsynlighet, og sannsynlighetene i teller og nevner finnes på samme måte som $P(X \geq 0)$ over,

$$\begin{aligned} P(X \geq 0 | X \leq 1) &= \frac{P(X \geq 0 \cap X \leq 1)}{P(X \leq 1)} \\ &= \frac{f(0) + f(1)}{f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)} = \underline{\underline{0.78}}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

Vi ønsker å finne sannsynligheten for at summen av X og Y er mindre enn 60 minutter, altså $P(X+Y \leq 60)$.

Vi vet at X og Y er uavhengige, slik at $f(x,y) = g(x)h(y)$. Dermed er simultanfordelingen gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{13} & \text{for } 0 < x < 30, 39 < y < 52 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi observerer at hendelsen $X+Y \leq 60$ vil oppstå hvis X tar verdier $0 < x < 60-y$, for enhver Y, slik at $39 < y < 52$. Dermed kan vi integrere simultantettheten over dette området for å regne ut sannsynligheten,

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq 60) &= \int_{39}^{52} \int_{0}^{60-y} f(x,y) dx dy \\ &= \int_{39}^{52} \int_{0}^{60-y} \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{13} dx dy \\ &= \int_{39}^{52} \left[\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{13} x \right]_{0}^{60-y} dy \\ &= \int_{39}^{52} \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{13} (60-y) dy \\ &= \left[\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{13} \left(60y - \frac{y^2}{2} \right) \right]_{39}^{52} \\ &= 0.4833 \end{aligned}$$