Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 4
Løsningsskisse

Oppgave 1

a) Utfallsrommet til X_1 er $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Sannsynlighetsfordelingen til X_1 er den den diskrete uniforme fordelingen på dette utfallsrommet, dvs. X har punktsannsynlighet

$$P(X_1 = x) = \frac{1}{6}, \quad \text{for } x \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

Forventingsverdien til X_1 er

$$E(X_1) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot P(X = x) = \sum_{x=1}^{6} \frac{x}{6} = \frac{21}{6} = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}.$$

b) Sannsynligheten for at $Y_2 = 1$ er lik sannsynligheten for å få seksere på første og andre kast,

$$P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 6 \cap X_2 = 6) = P(X_1 = 6)P(X_2 = 6) = \frac{1}{6^2}.$$

Tilsvarende har vi, for Y_3,

$$P(Y_3 = 1) = P(X_2 = 6 \cap X_3 = 6) = P(X_2 = 6)P(X_3 = 6) = \frac{1}{6^2}.$$

Den simultane sannsynligheten for at både $Y_2 = 1$ og $Y_3 = 1$ er

$$\begin{aligned} P(Y_2 = 1 \cap Y_3 = 1) &= P(X_1 = 6 \cap X_2 = 6 \cap X_3 = 6) \\ &= P(X_2 = 6)P(X_2 = 6)P(X_3 = 6) = \frac{1}{6^3}. \end{aligned}$$

Dette er ikke det samme som produktet av sannsynlighetene $P(Y_2 = 1)$ og $P(Y_3 = 1)$. Vi har altså

$$P(Y_2 = 1 \cap Y_3 = 1) = \frac{1}{6^3} \neq \frac{1}{6^4} = P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1),$$

som betyr at de tilfeldige variablene Y_2 og Y_3 ikke er uavhengige av hverandre.

Sannsynligheten for at $Y_4 = 1$ er lik sannsynligheten for å få seksere i tredje og fjerde kast,

$$P(Y_4 = 1) = P(X_3 = 6 \cap X_4 = 6) = \frac{1}{6^2},$$

og den simultane sannsynligheten for at både Y_2 og Y_4 er lik 1, er

$$\begin{aligned} P(Y_2 = 1 \cap Y_4 = 1) &= P(X_1 = 6 \cap X_2 = 6 \cap X_3 = 6 \cap X_4 = 6) \\ &= P(X_1 = 6)P(X_2 = 6)P(X_3 = 6)P(X_4 = 6) = \frac{1}{6^4}. \end{aligned}$$

I dette tilfellet er det likhet mellom den simultane sannsynligheten og produktet av de to marginale sannsynlighetene, $P(Y_2 = 1)$ og $P(Y_4 = 1)$. Det vil si

$$P(Y_2 = 1 \cap Y_4 = 1) = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6^2} = P(Y_2 = 1)P(Y_4 = 1),$$

hvilket betyr at Y_2 og Y_4 *er* uavhengige av hverandre.

Korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_3 er positiv, siden

$$P(Y_3 = 1|Y_2 = 1) = \frac{P(Y_2 = 1 \cap Y_3 = 1)}{P(Y_2 = 1)} = \frac{1/6^3}{1/6^2} = \frac{1}{6} > \frac{1}{6^2} = P(Y_3 = 1).$$

Med andre ord er sannsynligheten for å få poeng på tredje kast gitt at man allerede har fått poeng på andre kast, større enn den marginale sannsynligheten for å få poeng på tredje kast. Korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_4 blir null, siden de to er uavhengige tilfeldige variable.

c) Kovariansen mellom Y_2 og Y_3 er

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_2, Y_3) &= E(Y_2 Y_3) - E(Y_2)E(Y_3) \\ &= \sum_{y_2=0}^{1} \sum_{y_3=0}^{1} y_2 y_3 P(Y_2 = y_2 \cap Y_3 = y_3) - P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1) \\ &= P(Y_2 = 1 \cap Y_3 = 1) - P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1) = \tfrac{1}{6^3} - \tfrac{1}{6^2} \cdot \tfrac{1}{6^2} \\ &= \tfrac{1}{6^3} - \tfrac{1}{6^4} = \underline{\underline{0.0039}}. \end{aligned}$$

Forventningsverdien til $Z = Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_{10}$ er

$$E(Z) = E\left(\sum_{j=2}^{10} Y_j\right) = \sum_{j=2}^{10} E(Y_j) = \sum_{j=2}^{10} P(Y_j = 1) = 9 \cdot \frac{1}{6^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}},$$

og variansen er (siden $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+h}) = 0$ for $|h| > 1$)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=2}^{10} Y_j\right) &= \sum_{j=2}^{10} \mathrm{Var}(Y_j) + 2\sum_{j=2}^{9} \mathrm{Cov}(Y_j, Y_{j+1}) \\ &= 9\mathrm{Var}(Y_2) + 2 \cdot 8\mathrm{Cov}(Y_2, Y_3) \\ &= 9 \cdot \tfrac{1}{6^2}(1 - \tfrac{1}{6^2}) + 16 \cdot (\tfrac{1}{6^3} - \tfrac{1}{6^4}) \\ &= \underline{\underline{0.3048}}, \end{aligned}$$

hvor vi bruker at variansen til Y_2 er

$$\mathrm{Var}(Y_2) = E(Y_2^2) - E(Y_2)^2 = P(Y_2 = 1) - P(Y_2 = 1)^2 = \tfrac{1}{6^2}(1 - \tfrac{1}{6^2}).$$

Oppgave 2 Antar at $E(X_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$. Da er variansen til $a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n$ lik

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i - E\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i - \sum_{i=1}^n a_iE(X_i)\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)^2\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i \cdot \sum_{i=1}^n a_iX_i\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_ia_jX_iX_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_ia_jE(X_iX_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_ia_j\operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2\operatorname{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j<i} a_ia_j\operatorname{Cov}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

Oppgave 3

La X være mengden mørtel mureren bruker i løpet av en tilfeldig valgt arbeidsdag. Da er X en tilfeldig variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & 4 < x \leq 7 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Sannsynligheten for at det en tilfeldig dag går med mer enn 6 hl mørtel er

$$P(X > 6) = \int_6^\infty f(x)dx = \int_6^7 \frac{1}{3}dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

La m være mengden mørtel som kjøpes inn. Vi vil finne verdien $m_{0.05}$ som er slik at sannsynligheten for at forbruket X overstiger den innkjøpte mengden kontrolleres på fem prosent, altså har vi

$$P(X > m_{0.05}) = 0.05 \;\Leftrightarrow\; \int_{m_{0.05}}^\infty f(x)dx = 0.05 \;\Leftrightarrow\; \int_{m_{0.05}}^7 \frac{1}{3}dx = 0.05 \;\Leftrightarrow\; m_{0.05} = \underline{\underline{6.85}}.$$

b) Fra **a)** vet vi at $P(X > 6) = \frac{1}{3}$. La nå Z være antall dager han får for lite mørtel om han kjøper inn 6 hl. Sannsynligheten for at han får for lite mørtel minst én av dagene er

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \{P(X < 6)\}^4 = 1 - \left\{\frac{2}{3}\right\}^4 = \underline{\underline{0.8}}.$$

c) Mureren taper 20 kr per hl for mye mørtel og 50 kr per hl for lite mørtel. Vi definerer en funksjon $g(x)$ for å representere tap ved x hl mørtel. Hvis mureren har for mye mørtel $(4 < x \leq 6)$, vil det være igjen $(6-x)$ hl mørtel som gir $20 \cdot (6-x)$ kr tap. Hvis mureren har for lite mørtel $(6 < x \leq 7)$ vil tapet være på $50 \cdot (x-6)$ kr. For alle andre verdier av x er tapet 0 kr. Vi skriver dermed tapsfunksjonen

$$g(x) = \begin{cases} 20(6-x) & 4 < x \leq 6 \\ 50(x-6) & 6 < x \leq 7 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Siden X er en tilfeldig variabel, vil også tapet $T = g(X)$ være en tilfeldig variabel. Med *forventet tap* menes forventningsverdien til T. Denne er definert som

$$E(T) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

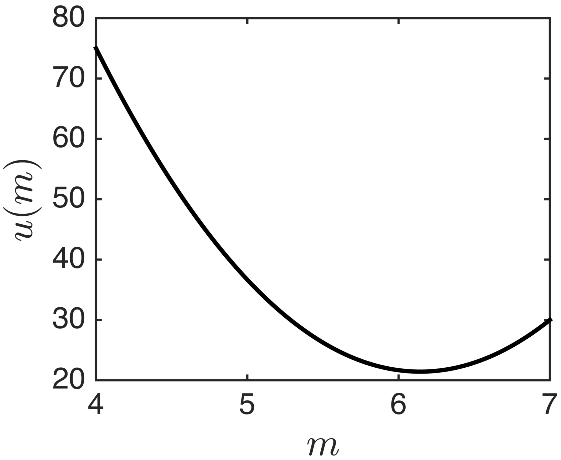
Forventet tap ved kjøp av 6 hl blir

$$\begin{aligned} E(T; \text{kjøper 6 hl}) &= 20\int_4^6 (6-x)f(x)dx + 50\int_6^7 (x-6)f(x)dx \\ &= \frac{20}{3}\int_4^6 (6-x)dx + \frac{50}{3}\int_6^7 (x-6)dx \\ &= \underline{\underline{21.7}}. \end{aligned}$$

La igjen m være mengden mørtel som kjøpes inn. Murerens faktiske tap T en tilfeldig dag er en funksjon av både mørtelforbruket X denne dagen, og av mengden innkjøpt mørtel m. Det forventede tapet $E(T)$ vil imidlertid kun være en funksjon av m, siden den tilfeldige variabelen X integreres ut når forventningsverdien beregnes. Vi vil først finne denne funksjonen, og deretter finne den verdien av m som minimerer den. Forventet tap når det kjøpes inn m hl mørtel er

$$\begin{aligned} E(T; \text{kjøper } m \text{ hl}) &= 20\int_4^m (m-x)f(x)dx + 50\int_m^7 (x-m)f(x)dx \\ &= \frac{20}{3}[mx - \frac{1}{2}x^2]_4^m + \frac{50}{3}[\frac{1}{2}x^2 - mx]_m^7 \\ &= \frac{20}{3}[m^2 - \frac{1}{2}m^2 - 4m + 8] + \frac{50}{3}[\frac{49}{2} - 7m - \frac{1}{2}m^2 + m^2] \\ &= \frac{70}{6}m^2 - \frac{430}{3}m + \frac{1385}{3}. \end{aligned}$$

Kall denne funksjonen $u(m)$. Figur 1 viser grafen til $u(m)$ for verdier av m mellom 4 og 7. Siden u er et kvadratisk polynom med positiv koeffisient i det første leddet, har den



Figur 1: Grafen til $u(m)$, forventet tap når det kjøpes inn m hl mørtel, for $4 \leq m \leq 7$.

et globalt minimumspunkt som vi finner ved å derivere, og sette $u'(m) = 0$,

$$\begin{aligned}
u'(m) &= \frac{70}{3}m - \frac{430}{3} \\
u'(m^*) &= 0 \\
\frac{70}{3}m^* &= \frac{430}{3} \\
m^* &= \frac{430}{70} = \underline{\underline{6.1429}}.
\end{aligned}$$

Siden $4 \leq m^* \leq 7$ kan mureren minimere sitt forventede tap ved å kjøpe inn $m^* \approx 6.14$ hl mørtel.

Oppgave 4

a) Figur 2 viser forslag til venndiagrammer for de to varepartiene.

Om en boks trekkes tilfeldig fra vareparti B, vil den ha F1-feil med sannsynlighet

$$P(F_1|B) = \frac{5}{100} = \underline{\underline{0.05}}.$$

Ved tilfeldig trekning av to bokser fra parti B, er sannsynligheten for å få én boks med kun F1-feil, og én boks me kun F2-feil, lik

$$P(F_1 \setminus F_2, F_2 \setminus F_1|B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{9}{1}}{\binom{100}{2}} = \underline{\underline{0.00727}}.$$

b) Et foreslått venndiagram for situasjonen er vist i figur 3.

Kjøpmannen trekker tre bokser, alle fra samme vareparti (A eller B). La A være å trekke fra A, B være å trekke fra B og C være å trekke én boks med kun F_1-feil og to

Figur 2: Venndiagrammer for de to varepartiene A og B.

feilfrie bokser. Hendelsen C svarer med andre ord til det utfallet kjøpmannen faktisk har observert. Siden det er å anse som helt tilfeldig hvilket parti boksene ble trukket fra, setter vi $P(A) = P(B) = 1/2$. Sannsynligheten for at den observerte hendelsen C inntreffer er da

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{4}{1}\binom{86}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{0.1690}}.$$

Den betingede sannsynligheten for at boksene kom fra vareparti A, gitt at kjøpmannen observerer C finner vi da ved hjelp av definisjonen av betinget sannsynlighet,

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{4}{1}\binom{86}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{10}{1}\binom{90}{2} + \binom{4}{1}\binom{86}{2}} = \underline{\underline{0.7326}}$$

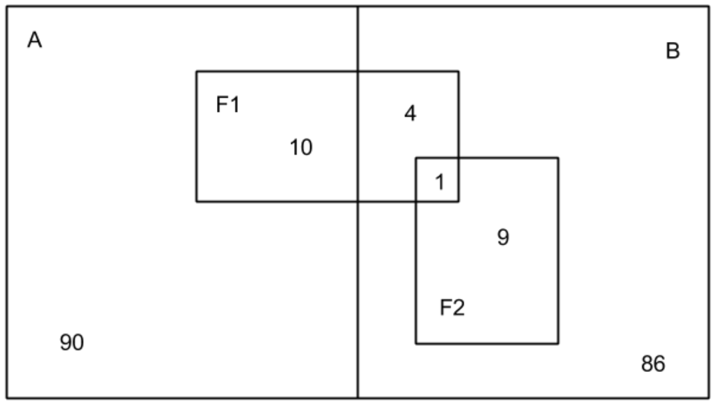
Merk at det i fasiten er brukt færre desimaler.

c) Regner ut den forventede inntekten forbundet med hver av de fire strategiene.

1. Om kjøpmannen selger alle de resterende boksene, har vi

Type	Antall	Gevinst pr. boks	Totalt
feilfri	$90 + 86 - 2 = 174$	10	1740
F_1	$14 - 1 = 13$	$10 - 10 = 0$	0
F_2	9	$10 - 10 - 150 = -150$	-1350
$F_1 \cap F_2$	1	$10 - 10 - 150 = -150$	-150

som gir forventet inntekt $1740 + 0 - 1350 - 150 = \underline{\underline{240}}$.



Figur 3: Venndiagram for de to varepartiene A og B sammen.

2. Om kjøpmannen selger resten av boksene fra den stabelen boksene ble trukket fra, får vi

Parti	Type	Antall	Gevinst pr. boks	Totalt
A	feilfri	$90-2=88$	10	880
	F_1	$10-1=9$	$10-10=0$	0
B	feilfri	$86-2=84$	10	840
	F_1	$4-1=3$	$10-10=0$	0
	F_2	9	$10-10-150=-150$	-1350
	$F_1 \cap F_2$	1	$10-10-150=-150$	-150

som gir forventet inntekt

$$880 \cdot P(A|C) + (840-1350-150) \cdot P(B|C) = 880 \cdot 0.7337 - 660 \cdot 0.2663 = \underline{\underline{470}}.$$

3. Hvis kjøpmannen kun selger boksene fra den stabelen boksene ikke ble trukket fra, har vi

Parti	Type	Antall	Gevinst pr. boks	Totalt
A	feilfri	90	10	900
	F_1	10	$10-10=0$	0
B	feilfri	86	10	860
	F_1	4	$10-10=0$	0
	F_2	9	$10-10-150=-150$	-1350
	$F_1 \cap F_2$	1	$10-10-150=-150$	-150

som gir den forventede inntekten

$$900 \cdot P(B|C) + (860-1350-150) \cdot P(A|C) = 900 \cdot 0.2663 - 640 \cdot 0.7337 = \underline{\underline{-230}}.$$

4. Forventet inntekt ved ikke å selge noen bokser er $\underline{\underline{0}}$.

Den beste beslutningen er nummer 2, altså å selge resten av boksene fra samme stabel som boksene ble trukket fra.