Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4240 Statistikk
Høst 2018

Anbefalt øving 4

Dette oppgavesettet er basert på stoffet som gjennomgås i fjerde uke med forelesninger. Oppgavene tar blant annet for seg forventningsverdi og varians.

Oppgave 1

I et spill kaster hver deltager i hver omgang en terning 10 ganger. Spilleren får ett poeng hver gang han får to 6-ere etter hverandre. Dersom utfallet av en omgang er

1 5 6 6 6 4 2 3 6 6

får spilleren 3 poeng. Etter at en spiller er ferdig med sine terningkast, går turen videre til nestemann. La X_i være utfallet av terningkast nr. i, $i = 1, ..., 10$.

a) Hva er utfallsrommet til X_1? Skriv opp sannsynlighetsfordelingen til X_1, dvs $P(X_1 = x)$, og beregn deretter $E(X_1)$.

For å telle antall poeng en spiller får i omgangen, Z, lar vi Y_j være lik 1 dersom spilleren får ett poeng etter kast nr. j, $j = 2, ..., 10$, og lik 0 ellers. Altså:

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{dersom} \quad X_j = X_{j-1} = 6 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi har da sammenhengen $Z = \sum_{j=2}^{10} Y_j$.

b) Er Y_2 og Y_3 avhengige eller uavhengige? (Begrunn svaret).
Er Y_2 og Y_4 avhengige eller uavhengige? (Begrunn svaret).
Avgjør om korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_3 er negativ, positiv eller null. (Begrunn svaret). Gjør det samme for korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_4.

c) Beregn $\mathrm{Cov}(Y_2, Y_3)$, $E(Z)$ og $\mathrm{Var}(Z)$. Avgjør om korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_3 er negativ, positiv eller null. (Begrunn svaret). Gjør det samme for korrelasjonskoeffisienten mellom Y_2 og Y_4.

Oppgave 2

Vis at

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \operatorname{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i} a_i a_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\end{aligned}$$

Det er nok at du viser det i det tilfellet at $E(X_i) = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Da er $\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^2\right]$

Oppgave 3

En murer har etter lang erfaring funnet ut at mengden ferdigblandet mørtel (X hl) som han bruker pr. dag er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } 4 < x \leq 7 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Den ferdigblandede mørtelen han kjøper inn én dag, kan ikke brukes neste dag. Dessuten forutsetter han at den mengde han bruker én dag, er uavhengig av mengden han bruker andre dager.

a) Hvor stor er sannsynligheten for at han en gitt dag skal bruke mer enn 6 hl mørtel? Hvor mye mørtel må han kjøpe inn én dag hvis sannsynligheten for å få for lite mørtel den dagen skal være 5% ?

b) Hvis han kjøper inn 6 hl mørtel hver dag i 4 dager, hvor stor er da sannsynligheten for at han minst én dag skal få for lite mørtel?

c) Han regner med at han taper 20 kr. pr. hl mørtel han ikke bruker en dag. Hvis han derimot får for lite mørtel, vil han p.g.a. tapt arbeidsfortjeneste tape 50 kr. for hver hl han kunne ha brukt. Hvor stort blir det forventede tapet hvis han kjøper inn 6 hl? Hvor mye bør han kjøpe inn for at tapet skal bli så lite som mulig?

Oppgave 4

En kjøpmann mottar to varepartier med fiskeboller fra samme produsent men fra to forskjellige fabrikker. Boksene kan altså ikke skilles fra hverandre utenpå. Varepartiene betegnes A og B, og de har følgende karakteristikker:

Vareparti A: 100 bokser, hvorav 10 med moste boller (betegnet $F1$).
Vareparti B: 100 bokser, hvorav 5 med moste boller (betegnet $F1$) og 10 med vond lukt og smak (betegnet $F2$), hvorav 1 boks har både $F1$ og $F2$.

Merk at feilene "moste boller"og "vond lukt og smak"ikke kan observeres utenpå, men krever ødeleggende testing for å avsløres.

a) Tegn Venndiagram for hver av varepartiene A og B, med angivelse av antall for alle hendelser. Hvis kjøpmannen hadde trukket en boks tilfeldig fra vareparti B, hva er sannsynligheten for å få en med feil $F1$? Hvis han hadde trukket to bokser tilfeldig fra vareparti B, hva er sannsynligheten for å trekke en med bare feil $F1$ og en med bare feil $F2$?

Varepartiene ble lagt på et lager og etter en tid glemte kjøpmannen hvilket som var vareparti A og hvilket som var vareparti B selv om de ligger i to separate stabler. Kjøpmannen trekker tilfeldig tre bokser fra en av stablene og merker seg hvilken det var. Han anser det som helt tilfeldig om det er vareparti A eller B. Etter å ha åpnet de tre boksene observerer han at to var feilfrie og en hadde bare feil $F1$.

b) Tegn et Venndiagram for prøvetakingssituasjonen, med angivelse av antall. Hva er sannsynligheten for å observere to feilfrie og en med bare feil $F1$? Hva er sannsynligheten for at kjøpmannen trakk boksene fra vareparti A?

Kjøpmannen ønsker deretter å selge fiskebollboksene for kr. 10,- pr. stk., men er bekymret for kundenes reaksjon på boksene med feil. Han er overbevist om at alle boksene blir solgt og at feilene vil oppdages og reklameres. Han bestemmer seg for følgende:

- mosete boller, bare feil $F1$, kjøpesummen på kr. 10,- gis tilbake til kunden.
- vond lukt og smak, feil $F2$ eller feil $F1$ og $F2$, kjøpesummen på kr. 10,- pluss kr. 150,- for tort og svie gis tilbake til kunden.

c) Kjøpmannen kan, etter at de tre boksene er observert og ødelagt velge mellom følgende:

1) selge alle de resterende boksene
2) selge de resterende boksene i den stabelen de tre observerte boksene kom fra
3) selge boksene i den andre stabelen
4) ikke selge noen bokser

Hvor stor er den forventede inntekt i hvert tilfelle? Hva er den beste beslutningen hvis kjøpmannen ønsker å maksimere sin forventede inntekt?

Fasit

1. **a)** $E(X_1) = 3.5$ **c)** $3.86 \cdot 10^{-3}$, 0.25, 0.55^2

3. **a)** 0.3, 6.85 **b)** 0.80 **c)** 21.7, 6.14

4. **a)** 0.05, 0.00727 **b)** 0.169, 0.7337 **c)** 240, 470, -230, 0