Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 6
Løsningsskisse

Oppgave 1 For eksponentialfordelingen har vi

$$\begin{aligned} P(X \geq t+s | X > s) &= \frac{P(X \geq t+s \cap X > s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X \geq t+s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} = \underline{\underline{P(X \geq t)}}. \end{aligned}$$

For den geometriske fordelingen har vi, for en vilkårlig $a \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$$P(X \geq a) = P(\text{Ingen suksesser på de første } a-1 \text{ forsøkene}) = (1-p)^{a-1},$$

og vi får dermed

$$\begin{aligned} P(X \geq t+s | X > s) &= \frac{P(X \geq t+s \cap X > s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X \geq t+s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X \geq t+s)}{P(X \geq s+1)} \\ &= \frac{(1-p)^{(t+s)-1}}{(1-p)^{(s+1)-1}} \\ &= \frac{(1-p)^{t+s-1}}{(1-p)^{s}} \\ &= (1-p)^{t-1} = \underline{\underline{P(X \geq t)}}. \end{aligned}$$

Oppgave 2 Test nasjonen — Eksamen desember 2004, oppgave 3 av 3

Kommentar: Vi ser i denne oppgaven på IQ som en kontinuerlig variabel. I IQ-tester så oppgis IQ-score som heltall, og vi vil i bedømmelsen av besvarelsene ikke trekke i poeng hvis man har valgt å regne med heltallig IQ eller har lagt til en slags “kontinuitetskorreksjon”, såfremt dette er begrunnet. Svarene man da kommer frem til avviker svært lite fra svarene som er oppgitt i denne løsningsskissen. La X være IQ-score til tilfeldig valgt person. Vi har at X er normalfordelt med $\mathrm{E}(X) = 100$ og $\mathrm{Var}(X) = 15^2$.

Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person skal få en IQ-score på minst 122?

$$\begin{aligned} P(X \geq 122) &= 1 - P(X < 122) = 1 - P(X \leq 122) = 1 - P(\frac{X - 100}{15} \leq \frac{122 - 100}{15}) \\ &= 1 - \Phi(1.47) = 1 - 0.9292 = \underline{\underline{0.0708}} \end{aligned}$$

Hvis vi tester et representativt utvalg på 270 personer, hva er da forventet antall personer som får en IQ-score på minst 122?

Dette er en binomisk situasjon med $n = 270$ og $p = 0.0708$. Forventet antall personer med IQ-score på minst 122 blir $n \cdot p = 270 \cdot 0.0708 = \underline{\underline{19.2}}$. Vi forventer at rundt 19 personer får en IQ-score på minst 122.

Hva er sannsynligheten for at maksimal IQ-score i et tilfeldig utvalg av størrelse 270 vil være større enn 122?

$$\begin{aligned} P(\max_{i=1,\ldots,270} X_i > 122) &= 1 - P(\max_{i=1,\ldots,270} X_i \leq 122) \\ &= 1 - P(X_1 \leq 122 \cap X_2 \leq 122 \cap \cdots X_{270} \leq 122) \\ &= 1 - [P(X_i \leq 122)]^{270} = 1 - (0.9292)^{270} = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

Et plott av sannsynlighetstetthene er gitt i figur 1. Videre har vi

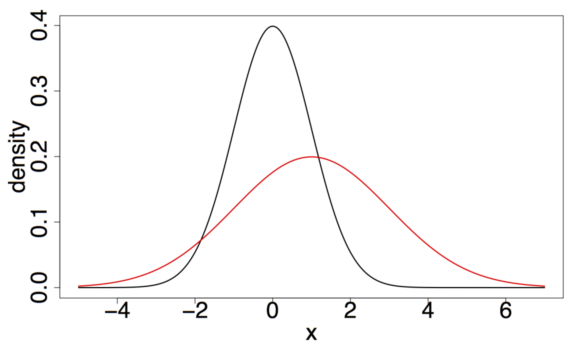
$$\mathrm{P}(X \leq 1.2) = \Phi(1.2) = \underline{\underline{0.8849}}$$

og

$$\mathrm{P}(Y > 2) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2-1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 0.6915 = \underline{\underline{0.3085}}.$$

Siden X og Y er antatt uavhengige og normalfordelte, og $X + Y$ er en lineærkombinasjon av X og Y, får vi at $X + Y$ også er normalfordelt. Dessuten får vi at $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] = 0 + 1 = 1$ og siden X og Y er uavhengige, $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 1^2 + 2^2 = 5$. Dermed blir

$$\mathrm{P}(X + Y \leq 2) = \Phi\left(\frac{2-1}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0.45) = \underline{\underline{0.6736}}.$$



Figur 1: Svart kurve er sannsynlighetstettheten for en normalfordeling med forventningsverdi lik 0 og standardavvik lik 1. Rød kurve er sannsynlighetstettheten for en normalfordeling med forventningsverdi lik 1 og standardavvik lik 2.