TMA4240 Statistikk
Høst 2018

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Instituttt for matematiske fag

Innlevering 2

Dette er den andre av tre innleveringer i blokk 1. Denne øvingen skal oppsummere pensum forelest de fire første forelesningsukene. Spesielt er det i denne innleveringen fokus på sannsynlighetsfordelinger, forventningsverdi og varians. For å få godkjent innleveringen kreves det at minimum 40% av svarene er riktige, og at man har gjort et ordentlig forsøk på å løse alle oppgavene. Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1

La den tilfeldige variabelen X beskrive i hvor lang tid en komponent har fungert i det den blir ødelagt. Vi kaller X for *levetiden* til komponenten.

Levetiden (målt i år), X, til en bestemt type mekaniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjon gitt ved

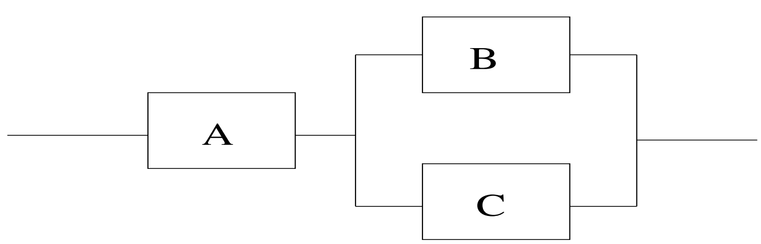
$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\alpha}\right\} \quad ; \quad x > 0$$

der α er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene. Den kumulative fordelingsfunksjonen er vist i Figur 1, for tilfellet $\alpha = 1$. Fra figuren ser vi for eksempel at det svært sannsynlig at en komponent slutter å fungere i løpet av fem år.

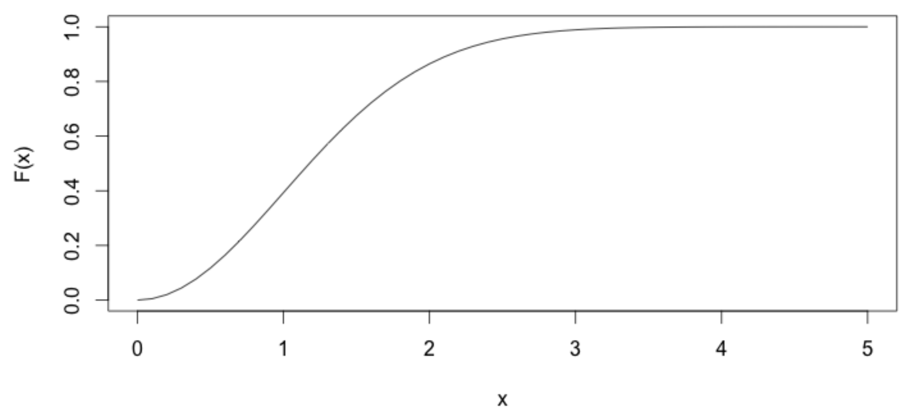
a) Bestem sannsynlighetstettheten til X.

Bestem for hvilken verdi av x sannsynlighetstettheten $f(x)$ tar sitt maksimum. Skisser $f(x)$.

Et instrument inneholder tre komponenter av denne typen, alle med samme kvalitetsparameter α. Vi refererer til de tre komponentene som komponenter A, B og C. Det antas at de tre komponentene svikter uavhengig av hverandre. Komponentene inngår i instrumentet slik at instrumentet kun vil fungere så lenge komponent A og minst en av komponentene B og C fungerer. Dette kan illustreres med følgende figur.



La følgende fire hendelser være definert:



Figur 1: Kumulativ fordelingsfunksjon for levetid X

A: Komponent A fungerer fremdeles etter to år.
B: Komponent B fungerer fremdeles etter to år.
C: Komponent C fungerer fremdeles etter to år.
D: Instrumentet fungerer fremdeles etter to år.

b) Tegn inn hendelsene A, B og C i et Venn-diagram.

Skraver hendelsen D i Venn-diagrammet.

For $\alpha = 1$, finn sannsynligheten for at instrumentet fremdeles fungerer etter to år.

Oppgave 2

Når lys av vilkårlig retning treffer en kule så absorberes en viss andel av lyset. Vi betegner denne andelen med X. Det kan vises at det er rimelig å oppfatte X som en stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{for } 0 \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der θ er en parameter som avhenger av kulas radius og type overflate.

Bestem kumulativ fordelingsfunksjon for X, F(x).

Skisser $f(x)$ og $F(x)$.

For $\theta = 2.0$, finn sannsynligheten P($X \leq 0.4$).

Oppgave 3

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med utfallsrom $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Punktsannsynlighetene for hvert utfall er gitt i følgende tabell

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1

Bestem sannsynlighetene

$$\mathrm{P}(X \geq 0) \qquad \text{og} \qquad \mathrm{P}(X \geq 0 | X \leq 1).$$

Regn ut forventningsverdien til X.

Oppgave 4

Simultanfordelingen, $f(x, y)$, til de to diskrete stokastiske variablene X og Y er gitt i følgende tabell:

	y=0	y=1	y=2
x=-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
x=0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
x=1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Finn marginalfordelingen $g(x)$ til X og marginalfordelingen $h(y)$ til Y, og beregn forventning og varians til X og til Y.

Beregn kovariansen mellom X og Y, $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Er X og Y uavhengige? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 5

Vi tenker oss to oljefelt. Vi antar at man ved oljeleting enten gjør et funn, eller ikke finner olje. Hendelsen A = oljefunn på felt 1, mens den komplementære hendelsen A^c = ingen olje på felt 1. Tilsvarende er hendelsen B = oljefunn på felt 2, mens B^c = ingen olje på felt 2. Vi får oppgitt at $P(A \cap B) = 0.05$, $P(A^c \cap B) = 0.1$, $P(A \cap B^c) = 0.15$ og $P(A^c \cap B^c) = 0.7$.

a) Finn sannsynligheten for olje på felt 1.

Antà at man har funnet olje på felt 2. Hva er nå sannsynligheten for olje på felt 1?

Anta at man har påvist at felt 2 ikke inneholder olje. Hva er nå sannsynligheten for olje på felt 1?

Er hendelsene A og B uavhengige?

Vi ser for oss en kostnad $K = 100$ millioner kroner ved å lete etter olje. Dersom man ikke finner olje får man ingen gevinst, men betaler denne kostnaden. Dersom man finner olje, får man en stor gevinst, som overstiger kostnaden K. Anta at fortjenesten ved oljefunn på felt 1 er $R_1 = 500 - K = 400$ millioner kroner, mens fortjenesten ved oljefunn på felt 2 er $R_2 = 1100 - K = 1000$ millioner kroner.

b) Regn ut forventet fortjeneste ved å lete etter olje på felt 1.

Anta at man har funnet olje på felt 2. Hva er nå forventet fortjeneste ved å lete etter olje på felt 1?

Anta at du kan velge mellom følgende letestrategier: Ikke lete noe sted, lete ved felt 1, eller lete ved felt 2. Hvis man velger å lete ved felt 1 eller 2, kan man avhengig av utfallet stoppe, eller lete videre på det andre feltet. Beslutninger velges utfra forventningsverdien. Hvilken letestrategi gir høyest forventet fortjeneste, og hva er forventet fortjeneste under denne strategien?

Oppgave 6

La den tilfeldige (stokastiske) variabelen Y beskrive en persons årslønn for 2011 i kNOk (1 kNOK er 1000 norske kroner). Paretos lov påstår da at

$$P(Y \geq y) = \left(\frac{k}{y}\right)^{\theta},$$

der $\theta > 2$, $y \geq k$, og hvor k er minimumsinntekten for hele populasjonen.

Anta at Paretos lov stemmer. Vis at sannsynlighetsfordelingen (tettheten) til Y er

$$f(y) = \frac{\theta k^{\theta}}{y^{\theta+1}}, \quad y \geq k, \;\; \theta > 2.$$

Finn forventningsverdi og varians til Y.

Fasit

1. **a)** $\alpha^{1/2}$ **b)** 0.034

2. 0.2

3. $\mathrm{E}[X] = 0.1$

4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{6}$

5. a) 0.200, 0.333, 0.176 b) 75 millioner kr