TMA4240 Statistikk
Høst 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalte oppgaver 1
Løsningsskisse

Oppgave 1

En eske inneholder 100 gjenstander som kan ha defekter av type A, type B og type C. Følgende defekter er oppgitt i oppgaven:

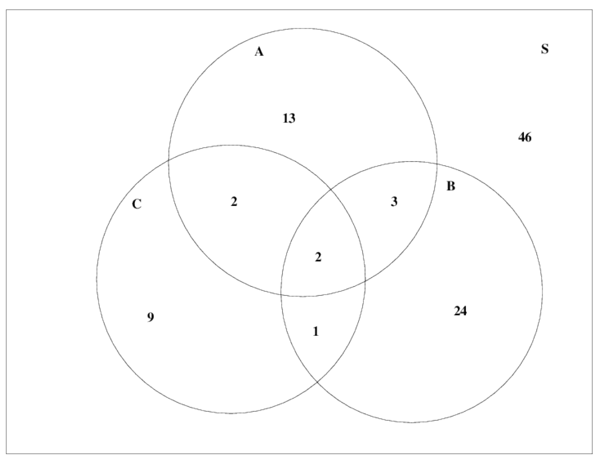
Beskrivelse	Symbol	Antall
Ingen defekt	$A' \cap B' \cap C'$	46
Har kun defekt av type A	$A \cap B' \cap C'$	13
Har kun defekt av type B	$A' \cap B \cap C'$	24
Har kun defekt av type C	$A' \cap B' \cap C$	9
Har defekt av type A og B, ikke C	$A \cap B \cap C'$	3
Har defekt av type A og C, ikke B	$A \cap B' \cap C$	2
Har defekt av type B og C, ikke A	$A' \cap B \cap C$	1
Har defekt av alle typer	$A \cap B \cap C$	2

La gjenstandene være nummerert $1, \ldots, 100$. Et naturlig utfallsrom er da

$$S = \{1, 2, 3, ..., 99, 100\}.$$

Venn-diagrammet for defekter av type A, type B og type C er vist i figur 1. Vi har videre

Beskrivelse	Symbol	Antall
Minst en type defekt	$A \cup B \cup C$	54
Bare en type defekt	$(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$	46
Minst to typer defekt	$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$	8



Figur 1: Venn-diagram for defekter av type A, type B og type C.

Oppgave 2

Hvis hendelsene A og B er uavhengige, vil enhver kunnskap om hvorvidt A har inntruffet *ikke* gi noen informasjon om hvorvidt B har inntruffet, og vice versa. Vi har da

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Dersom A og B er disjunkte, vil snittet mellom dem være tomt,

$$A \cap B = \emptyset.$$

Følgelig vil sannsynligheten for at begge hendelsene inntreffer være null,

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0.$$

Eksempel på uavhengige hendelser: Anta at du utfører et terningkast og et myntkast hver for seg. La A være hendelsen at terningen viser et odde antall øyne, og la B være hendelsen at myntkastet resulterer i *kron*. Da er A og B uavhengige.

Eksempel på disjunkte hendelser: Betrakt det samme terningkastet som over, og la A være hendelsen at terningen viser et odde antall øyne, som før. La nå B være hendelsen at terningen viser et like antall øyne. Da er A og B disjunkte.

Når hendelsene A og B er disjunkte, har vi

$$P(A \cap B) = 0.$$

Det vil si, det er umulig at begge hendelsene inntreffer. Hvis vi får opplyst at A har inntruffet, vil vi vite med sikkerhet at B ikke har inntruffet. Med andre ord kan kunnskap om A gi informasjon om B. Altså kan ikke A og B være uavhengige.

Oppgave 3

Vi har at

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\text{kron} \cap \text{falsk}) + P(\text{kron} \cap \text{ekte}) \\
&= P(\text{kron}|\text{falsk})P(\text{falsk}) + P(\text{kron}|\text{ekte})P(\text{ekte}) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

De to kastene er like, så $P(B) = P(A)$.

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A \cap B \cap \text{ekte}) + P(A \cap B \cap \text{falsk}) \\
&= P((A \cap B)|\text{ekte})P(\text{ekte}) + P((A \cap B)|\text{falsk})P(\text{falsk}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Vi finner at $P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$, dermed er hendelsene avhengige.

Oppgave 4 Den betingete sannsynligheten for A gitt B er definert som

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

for $P(B) > 0$.

I) Da $P(\cdot)$ er en sannsynlighet er $P(A \cap B) \geq 0$ for enhver hendelse A, og dermed er

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0.$$

II) La utfallsrommet være $S_B = B$. Dermed er

$$P(S_B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

III)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots |B) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B))}{P(B)}.$$

Da $\{A_i\}$ er disjunkte er også $\{A_i \cap B\}$ disjunkte

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$