Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalte oppgaver 11

Oppgave 1 Antall (X) kolibakterier i ν_0 liter drikkevann fra en bestemt drikkevannskilde antas å være poissonfordelt,

$$P(X = x) = \frac{(\lambda\nu_0)^x}{x!} \exp(-\lambda\nu_0), \qquad x = 0, 1, \ldots$$

a) Bestem $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$. Hvorfor er det naturlig å oppfatte λ som et mål for forurensningsgraden?

b) Anta $\lambda = 3$. Hvor stor er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt liter av drikkevannet skal være fri for kolibakterier? Hvor stor prøve (ν_0 liter) må en ta for at prøven med en sannsynlighet på minst 0.9975 skal inneholde én eller flere kolibakterier?

λ antas nå å være ukjent og skal estimeres. Estimatoren skal baseres på antall kolibakterier en finner i to tilfeldige valgte vannprøver. La X_1 betegne antall kolibakterier i den første vannprøve som er på ν_1 liter, mens X_2 er antall kolibakterier i den andre vannprøven som er på ν_2 liter. X_1 og X_2 antas å være stokastisk uavhengige.

c) Det er foreslått to forskjellige estimatorer for λ,

$$\lambda^* = \frac{\nu_1 X_1 + \nu_2 X_2}{\nu_1^2 + \nu_2^2}, \qquad \text{og} \qquad \hat{\lambda} = \frac{X_1 + X_2}{\nu_1 + \nu_2}.$$

Sammenlign egenskapene til λ^* og $\hat{\lambda}$. Hvilken estimator vil du foretrekke og hvorfor?

En skal undersøke om observasjonene tyder på at λ er større enn 1.

d) Sett opp nullhypotese og alternativ, og vis hvordan du kan lage en test basert på estimatoren $\hat{\lambda}$.

e) Hva blir konklusjonen på testen i d) når den første prøven er på 1 liter og inneholder 1 kolibakterie, mens den andre prøven er på 2 liter, og inneholder 5 kolibakterier? Signifikansnivået settes lik 5%. Regn også ut p-verdien for dette resultatet.

f) Hva er sannsynligheten for at testen i d) ikke gir forkastning dersom $\lambda = 3$?

Oppgave 2

Agent John Bang går regelmessig til skytetrening. Erfaring sier at hans sannsynlighet for et treff er $p = 0.8$. I en treningssesjon skyter han 20 skudd. Anta at skuddene er uavhengige og at hvert enkeltskudd er enten en treff eller bom.

a) Hva er forventet antall treff?

Hva er sannsynligheten for at han treffer flere enn forventet?

Hva er den betingete sannsynligheten for at han treffer 20 når vi vet at han treffer flere enn forventet?

Sjefen bestemmer at John skal ha en ny pistol. De håper at denne skal gi forbedret treffsannsynlighet. De ønsker å undersøke om dette holder, og John bruker den nye pistolen i en vanlig treningssesjon med 20 skudd.

b) Formuler problemet som en hypotesetest.

Bruk den vanlige normalapproksimasjonen til å gjennomføre hypotesetesten på signifikansnivå $\alpha = 0.1$ når observert antall treff er 18.

c) Forklar hvordan testen kan gjennomføres eksakt ved bruk av binomisk fordeling.

Hva blir P-verdien til den eksakte testen når han treffer på 18 skudd?

Anta signifikansnivå $\alpha = 0.1$ for testen. Regn ut teststyrken for den eksakte testen når sann treffsannsynlighet er $p = 0.9$.

Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven se for oss at vi kaster en mynt flere ganger. Mynten har 0.5 sannsynlighet for utfall «mynt» og 0.5 sannsynlighet for «kron». Vi antar at utfallene av ulike myntkast er uavhengige.

a) Anta at vi kaster mynten 5 ganger.

Hva er sannsynligheten for å få 5 «kron»?

Hva er sannsynligheten for å få 3 «kron»?

Hva er sannsynligheten for å få minst 4 «kron» på rad, det vil si en sekvens (*streak*) av bare «kron» utfall som minst er av lengde 4?

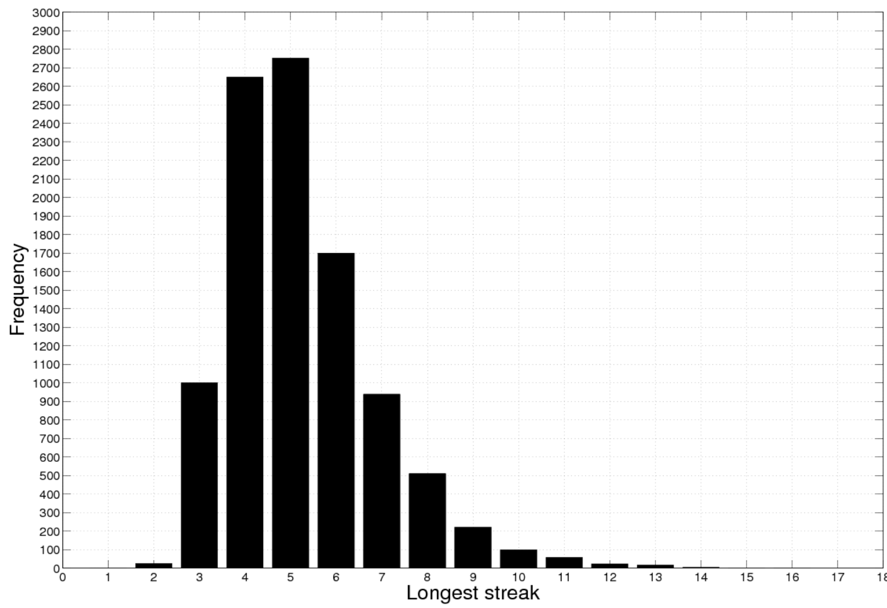
b) Vi kaster mynten 30 ganger. Fordelingen til lengste sekvens med «kron» er vanskelig å regne ut. I stedet kan vi få en datamaskin til å generere 30 stokastiske og uavhengige myntkast. Vi registrerer lengste sekvens av «kron». Prosedyren gjentas B ganger, og resultatet er representativt for fordelingen for lengste sekvens av «kron», se Figur 1.

Anslå sannsynligheten for å få en lengste sekvens på 5 eller 6.

Miriam har fått hjemmelekse å kaste en mynt 30 ganger. Resultatet er som følger, der 0 betyr «mynt» og 1 betyr «kron»:
$(0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$.

Læreren mistenker at Miriam har jukset og bare funnet på tallene istedenfor å faktisk kaste en mynt, og læreren vil undersøke dette. Formuler dette som en hypotesetest om lengste sekvens av «kron». Bruk histogrammet i Figur 1 til å svare.

Fasit



Figur 1: Figuren viser et histogram av sekvenser. Disse er resultat av $B = 10000$ gjentak av 30 myntkast. Høyden på stolpene angir i hvor mange av de 10000 forsøkene lengste sekvens av «kron» var en bestemt lengde

1. **b**) 0.0498, 1.9972 **e**) $p = 0.08$ **f**) 0.21

2. **a**) 16, 0.41, 0.028 **b**) ikke forkast H_0 **c**) 0.21, 0.39

3. **a**) 0.031,0.313,0.09 **b**) 0.44, forkast H_0