TMA4240 Statistikk
Høst 2020

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalte oppgaver 3
Løsningsskisse

Oppgave 1

Forventningsverdien til X er lik summen av $xf(x)$ for alle mulige verdier av x,

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=-2}^{2} xf(x) = -2 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = \underline{\underline{0.1}}.$$

Sannsynligheten for at $X \geq 0$ finnes ved å summere punktsannsynlighetene til alle enkeltutfallene x som oppfyller $x \geq 0$, altså 0, 1 og 2,

$$P(X \geq 0) = f(0) + f(1) + f(2) = \underline{\underline{0.8}}.$$

Den betingede sannsynligheten for at $X \geq 0$ gitt at $X \leq 1$ finnes utfra definisjonen av betinget sannsynlighet, og sannsynlighetene i teller og nevner finnes på samme måte som $P(X \geq 0)$ over,

$$\begin{aligned} P(X \geq 0 | X \leq 1) &= \frac{P(X \geq 0 \cap X \leq 1)}{P(X \leq 1)} \\ &= \frac{f(0) + f(1)}{f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)} = \underline{\underline{0.78}}. \end{aligned}$$

Oppgave 2

Sannsynlighetstetthetsfunksjonen

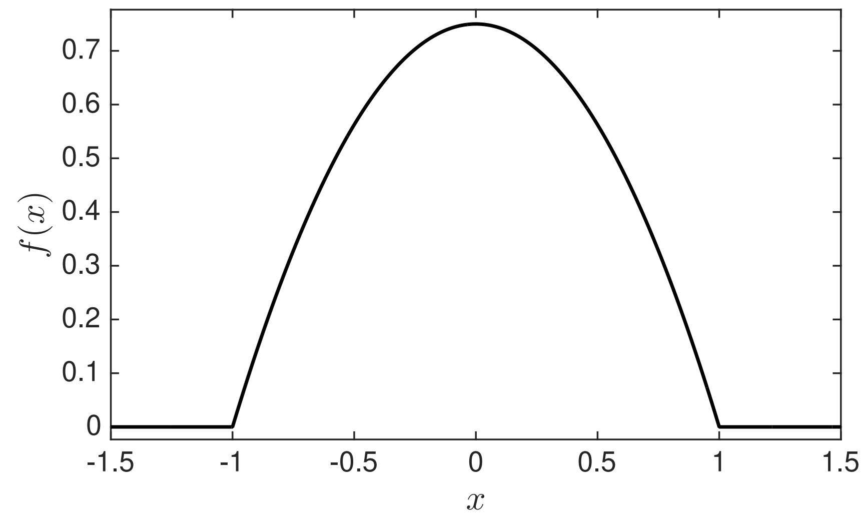
$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

er oppgitt. Normaliseringskonstanten k bestemmer vi ved å bruke at integralet av $f(x)$ fra $-\infty$ til ∞ må være lik 1 for at $f(x)$ skal være en sannsynlighetstetthet. Vi må altså ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 1.$$

Verdien av integralet er

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = k[x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = k(1 - \tfrac{1}{3} - (-1 + \tfrac{1}{3})) = \tfrac{4}{3}k.$$



Figur 1: Grafen til sannsynlighetstettheten $f(x)$ for $-1.5 \leq x \leq 1.5$.

For at dette skal være lik 1 må vi ha $\underline{\underline{k = 3/4}}$. Sannsynlighetstettheten er illustrert i figur 1. Sannsynligheten for at $X \leq 0.6$ finner vi ved å integrere tettheten fra -1 til 0.6,

$$P(X \leq 0.6) = \int_{-1}^{0.6} \tfrac{3}{4}(1 - x^2)dx = \tfrac{3}{4}[x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-1}^{0.6} = \tfrac{3}{4}(0.6 - 0.04167 - (-1 + 0.3333)) = \underline{\underline{0.8960}}$$

Sannsynligheten for at $X \leq 0.8$ gitt at $X > 0.6$ finner vi fra definisjonen av betinget sannsynlighet,

$$P(X \leq 0.8 | X > 0.6) = \frac{P(X \leq 0.8 \cap X > 0.6)}{P(X > 0.6)} = \frac{P(0.6 < X \leq 0.8)}{P(X > 0.6)}. \tag{2.1}$$

Sannsynligheten i telleren er

$$P(0.6 < X \leq 0.8) = \int_{0.6}^{0.8} \tfrac{3}{4}(1 - x^2)dx = \tfrac{3}{4}[x - \tfrac{1}{3}x^3]_{0.6}^{0.8} = \tfrac{3}{4}(0.629 - 0.528) = 0.0757,$$

og den i nevneren er

$$P(X > 0.6) = 1 - P(X \leq 0.6) = 1 - 0.8960.$$

Setter vi disse to sannsynlighetene inn i (2.1) får vi

$$P(X \leq 0.8 | X > 0.6) = \frac{0.0757}{1 - 0.8960} = \underline{\underline{0.728}}.$$

Oppgave 3

a)

$$\mathrm{P}(X>Y)=\mathrm{P}(X=1,Y=0)+\mathrm{P}(X=2,Y=0)+\mathrm{P}(X=2,Y=1)=0.06+0.04+0.10=\underline{\underline{0.2}}.$$

Marginal punktsannsynlighet for X blir

$$\begin{aligned} g(0) &= \mathrm{P}(X=0)=0.10+0.25+0.15=0.5,\\ g(1) &= \mathrm{P}(X=1)=0.06+0.15+0.09=0.3,\\ g(2) &= \mathrm{P}(X=2)=0.04+0.10+0.06=0.2. \end{aligned}$$

Marginal punktsannsynlighet for Y blir

$$\begin{aligned} h(0) &= \mathrm{P}(Y=0)=0.10+0.06+0.04=0.2,\\ h(1) &= \mathrm{P}(Y=1)=0.25+0.15+0.10=0.5,\\ h(2) &= \mathrm{P}(Y=2)=0.15+0.09+0.06=0.3. \end{aligned}$$

X og Y er uavhengige hvis og bare hvis $f(x,y)=g(x)h(y)$ for alle x og y. Regner ut $g(x)h(y)$ for $x,y=0,1,2$ og får

$x\backslash y$	0	1	2
0	0.10	0.25	0.15
1	0.06	0.15	0.09
2	0.04	0.10	0.06

Vi ser dermed at kravet til uavhengighet er oppfylt, så $\underline{\underline{X \text{ og } Y \text{ er uavhengige}}}$.

Oppgave 4 Oppgitt: $\int_0^\infty x^r e^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{r!}{a^{r+1}}$ for $a>0$, $r\geq 0$ heltall.

a) For at $g(x)$ skal være en sannsynlighetstetthet, må vi ha $\int_{-\infty}^\infty g(x)\mathrm{d}x=1$, dvs at total sannsynlighet er 1. (Bruker formelen med $r=1$ og $a=2$.)

$$\int_{-\infty}^\infty g(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty kxe^{-2x}\mathrm{d}x=k\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{k}{4}.$$

$k/4=1$ gir $k=4$.

For forventet forsinkelse brukes formelen igjen, med $r=2$ og $a=2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^\infty xg(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty x\cdot 4xe^{-2x}\mathrm{d}x\\ &= 4\int_0^\infty x^2e^{-2x}\mathrm{d}x=4\cdot\frac{2}{2^3}=1. \end{aligned}$$

For å vise at det er 0.09 i sannsynlighet for mer enn to minutters forsinkelse, bruker vi delvis integrasjon.

$$
\begin{aligned}
\text{Prob}(X > 2) &= \int_2^\infty 4xe^{-2x}\text{dx} \\
&= 4 \cdot \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} \right]_{x=2}^{\infty} + 4 \cdot \int_2^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}\mathrm{d}x \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2e^{-4} + \int_2^\infty 2e^{-2x}\mathrm{d}x \\
&= 4e^{-4} + e^{-4} = 5e^{-4} \approx 0.09.
\end{aligned}
$$

b) Setter $x = 2$ i den betingede fordelingen. Da har oppholdstiden Y fordeling $f(y|2) = e^{-y}$ for $y > 0$. Med andre ord er $Y|X = 2$ eksponensialfordelt med parameter (og forventningsverdi) 1.

Simultantetthet finner vi ved å multiplisere;

$$
f(x, y) = f(y|x)g(x) = \frac{x}{2}e^{-\frac{xy}{2}} \cdot 4xe^{-2x} = 2x^2 e^{-x(2+\frac{y}{2})} \qquad \text{for } x > 0, y > 0.
$$

Marginaltettheten for Y finnes ved å integrere ut x:

$$
\begin{aligned}
h(y) &= \int_0^\infty f(x, y)\mathrm{d}x = \int_0^\infty 2x^2 e^{-x(2+\frac{y}{2})}\mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot \frac{2}{(2 + \frac{y}{2})^3} = \frac{32}{(4 + y)^3}, \qquad \text{for } y > 0.
\end{aligned}
$$

Her brukte vi enda en gang formelen som var oppgitt, denne gangen med $a = 2 + y/2$ og $r = 2$.