



Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for matematiske fag

TMA4240 Statistikk  
Høst 2020

Anbefalte oppgaver 5

### Oppgave 1

Antall tankskip  $X$  som ankommer til en bestemt havn i løpet av en dag har vist seg å være poissonfordelt med  $E(X) = 2$ . Havnen kan maksimalt betjene 3 tankskip pr. dag. De tre første ankomne blir ekspedert, eventuelle øvrige blir omdirigert til annen havn.

- Hvilke(t) antall tankskip har størst sannsynlighet for å ankomme en bestemt dag? Hvor stor er sannsynligheten for at det en bestemt dag må dirigeres tankskip til andre havner?
- Hva er forventet antall skip som blir betjent en bestemt dag?
- Hvor stor kapasitet må havnen bygges ut til for med minst 90% sannsynlighet å kunne betjene samtlige skip som ankommer en gitt dag?

### Oppgave 2

En bedrift har kjøpt 10 PC'er av et bestemt merke, og vil vurdere behovet for vedlikeholdsavtale på disse. De regner med at feil som oppstår kan være av to typer: feil som man kan utbedre selv (A feil) og feil som krever assistanse fra merkeleverandør (B feil). La  $X$  være antall A feil og  $Y$  antall B feil på en tilfeldig valgt PC i løpet av  $t$  år. Vi skal gå ut fra at A feil og B feil er uavhengige, at alle PC'ene feiler uavhengige av hverandre, og at  $X$  og  $Y$  er poissonfordelte,

$$f_X(x) = \frac{(0.25t)^x e^{-0.25t}}{x!} \text{ og } f_Y(y) = \frac{(0.15t)^y e^{-0.15t}}{y!}$$

- Hva er forventet antall A feil på en tilfeldig valgt PC i løpet av 4 år? Finn sannsynligheten for at tallet på A feil på en PC i samme tidsrom skal være 3 eller større.
- La  $N_X$  være samlet tall på A feil og la  $N_Y$  være samlet tall på B feil for alle 10 PC-ene over et visst tidsrom. Forklar hvorfor  $N_X$  og  $N_Y$  er poissonfordelte. Hvilken punktsannsynlighet får disse?
- La  $Z$  være antall PC-er som er feilfrie i 4 år. Hvilken fordeling får  $Z$ ? Begrunn svaret. Finn  $P(Z > 2)$ . La  $A'$  være når det ikke skjer A feil på en PC i et visst tidsrom, og  $B'$  når det ikke skjer B feil på samme PC i samme tidsrom. Er  $A'$  og  $B'$  uavhengige? Er de disjunkte? Begrunn svarene.
- La  $V$  være tallet på PC-er det oppstår feil på i løpet av 4 år. Hvilken fordeling får  $V$ ? Finn ved regning et uttrykk for korrelasjonskoeffisienten mellom  $V$  og  $Z$  og gi en intuitiv

forklaring av svaret.

### Oppgave 3

Vi ser på dødsfall om natten ved sykehjemmet "Aftensol". Ved sykehjemmet er det tre sykepleiere i rene nattevaktstillinger, Anne, Bernt og Cecilie. Hver natt er en av dem på vakt gjennom hele natten, og det er da ingen andre ansatte tilstede ved hjemmet. Anne jobber i 100% nattevaktstilling, mens Bernt og Cecilie jobber i 50% nattevaktstillinger.

Vi ser på en tilfeldig valgt natt og definerer følgende hendelser:

$A$  = Anne er på vakt,  
 $B$  = Bernt er på vakt,  
 $C$  = Cecilie er på vakt,  
 $D$  = det skjer et dødsfall.

Anta at alle dødsfall er naturlige. Det er da rimelig å gå ut fra at sannsynligheten for dødsfall er den samme uansett hvilken sykepleier som er på vakt, dvs. at  $P(D|A) = P(D|B) = P(D|C)$ . Anta at den felles verdi for disse er 0.06.

a) Tegn de 4 hendelsene definert ovenfor i et venndiagram.

Hva er sannsynlighetene  $P(A)$ ,  $P(B)$  og  $P(C)$ ?

Finn  $P(D)$ . Er hendelsene  $D$  og  $C$  uavhengige? Begrunn svaret.

I den siste tiden har det vært 10 dødsfall om natten ved sykehjemmet, og hele 7 av disse har skjedd når Cecilie har vært på vakt. Det er derfor satt igang etterforskning for eventuelt å avdekke om Cecilie har noe med dødsfallene å gjøre.

Anta i det følgende at alle dødsfallene er naturlige, og at de har skjedd på forskjellige netter.

La  $X$  være en stokastisk variabel som beskriver antall av  $n = 10$  naturlige dødsfall som skjer på Cecilies vakter.

b) Forklar hvorfor det kan antas at  $X$  er binomisk fordelt med  $n = 10$  og  $p = 0.25$ . (Det er ikke tilstrekkelig å skrive opp de generelle forutsetningene for en binomisk fordeling, betingelsene må relateres direkte til situasjonen som er beskrevet.)

Hva er sannsynligheten for at 7 eller flere av 10 dødsfall om natten skjer på Cecilies vakter?

La oss tenke oss at det rundt om på sykehjem i Norge jobber 300 andre sykepleiere i tilsvarende stilling som Cecilie. Hva er sannsynligheten for at minst en av de 300 sykepleierne opplever at 7 eller flere av 10 naturlige dødsfall skjer på sine vakter?

Gir svarene i dette punktet grunn til å styrke mistanken mot Cecilie? Begrunn svaret.

### Oppgave 4

Forklar i hvilke situasjoner den hypergeometriske fordeling kan tilnærmes med den binomiske fordeling, og i hvilke situasjoner den binomiske fordeling kan tilnærmes med en Poisson fordeling.

### Oppgave 5

Antall trykkfeil,  $N$ , i et manuskript på  $s$  sider, antas å være en poissonfordelt stokastisk variabel med parameter  $\lambda s$ , dvs.

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp(-\lambda s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En korrekturleser som leser korrektur på manuskriptet antas å oppdage hver trykkfeil med sannsynlighet  $p$  og ikke oppdage trykkfeilen med sannsynlighet  $1 - p$ . La  $X$  være antall feil korrekturleseren finner dersom han leser igjennom manuskriptet en gang. Vi skal anta at  $X$  gitt  $N=n$  er binomisk fordelt,

$$P(X = x|N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

- a) Hvilken betingelse må vi i tillegg anta dersom vår antagelse om at  $X|N=n$  er binomisk fordelt, skal være korrekt?

Dersom  $\lambda = 2$  og manuskriptet er på  $s = 8$  sider, hva er da sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?

Dersom vi vet at manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og at  $p = 0.6$ , hva er da sannsynligheten for at korrekturleseren vil finne alle trykkfeilene?

La  $Y_k$  være antall trykkfeil som gjenstår etter at korrekturleseren har lest igjennom manuskriptet  $k$  uavhengige ganger ( $k = 1, 2, \dots$ ), dvs.  $Y_1$  er antall trykkfeil som gjenstår etter en gjennomlesning.

- b) Finn simultanfordelingen til  $Y_1$  og  $N$ , og bruk den til å finne (marginal)fordelingen til  $Y_1$ . Hva er fordelingen til  $Y_k$ ?

### Fasit

- a) 1 eller 2, 0.143 b) 1.782 c) 4
- a) 1, 0.0803 c) 0.328
- a)  $P(D)=0.06$  b) 0.004, 0.7
- a)  $P(N > 10)=0.923$ ,  $P(\text{finner alle feil}) = 0.0022$  b)  $Y_k \sim \text{Poisson}(\lambda s(1 - p)^k)$