

De neste to-tre ukene

- ★ Mitt navn: Håkon Tjelmeland
 - vikar for John Tyssedal i to eller tre uker
- ★ Foiler vil bli lagt ut på hjemmesida i etterkant av forelesningene
- ★ Forelesningsnotater vil IKKE bli lagt ut på hjemmesida

Konfidensintervall for μ i normalfordeling (σ^2 kjent)

- ★ Situasjon: Anta X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utvalg fra $n(x; \mu, \sigma)$ -populasjonen. Ønsker $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ .

1) Estimator for μ : $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

2) Har at $\bar{X} \sim n(\bar{x}, \mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}})$, og dermed

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z; 0, 1).$$

- 3) Har dermed at

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

- 4) Løser hver ulikhet med hensyn på μ og får

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Tolkning av konfidensintervall

- ★ Tolkning tar utgangspunkt i uttrykket

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

- husk: tolkning av sannsynlighet, $P(A)$
- må tenke oss at vi gjentar forsøket mange ganger

Tolkning av konfidensintervall

- ★ Tolkning tar utgangspunkt i uttrykket

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

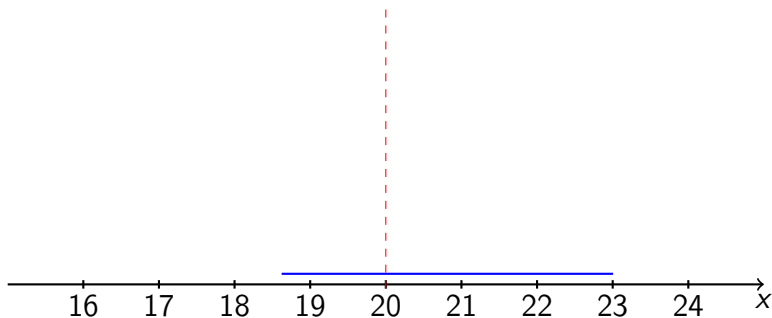
- husk: tolkning av sannsynlighet, $P(A)$
- må tenke oss at vi gjentar forsøket mange ganger
- ★ Simuleringseksempel: X_1, X_2, \dots, X_{20} tilfeldig utvalg fra $N(20, 5^2)$ -populasjonen, $\alpha = 0.05$

Tolkning av konfidensintervall

- ★ Tolkning tar utgangspunkt i uttrykket

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

- husk: tolkning av sannsynlighet, $P(A)$
- må tenke oss at vi gjentar forsøket mange ganger
- ★ Simuleringseksempel: X_1, X_2, \dots, X_{20} tilfeldig utvalg fra $N(20, 5^2)$ -populasjonen, $\alpha = 0.05$

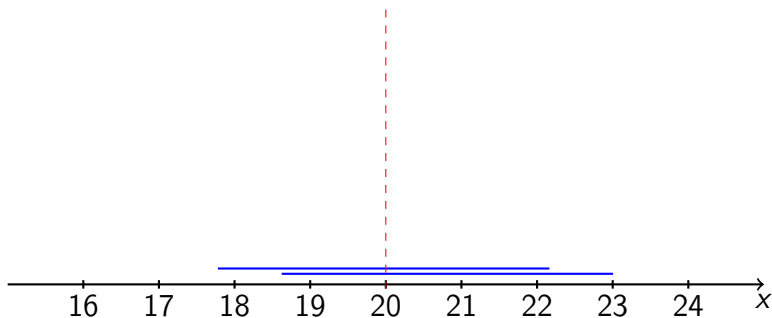


Tolkning av konfidensintervall

- ★ Tolkning tar utgangspunkt i uttrykket

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

- husk: tolkning av sannsynlighet, $P(A)$
- må tenke oss at vi gjentar forsøket mange ganger
- ★ Simuleringseksempel: X_1, X_2, \dots, X_{20} tilfeldig utvalg fra $N(20, 5^2)$ -populasjonen, $\alpha = 0.05$

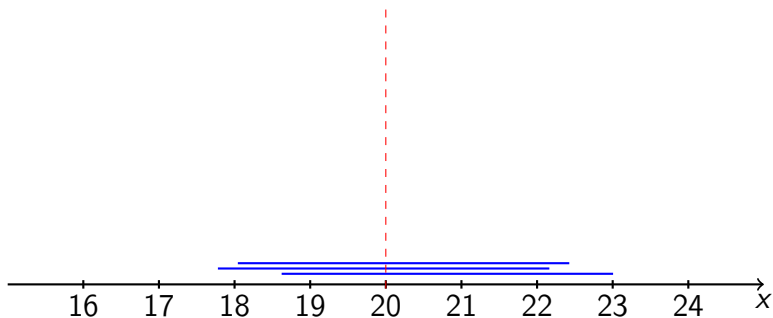


Tolkning av konfidensintervall

- ★ Tolkning tar utgangspunkt i uttrykket

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

- husk: tolkning av sannsynlighet, $P(A)$
- må tenke oss at vi gjentar forsøket mange ganger
- ★ Simuleringseksempel: X_1, X_2, \dots, X_{20} tilfeldig utvalg fra $N(20, 5^2)$ -populasjonen, $\alpha = 0.05$

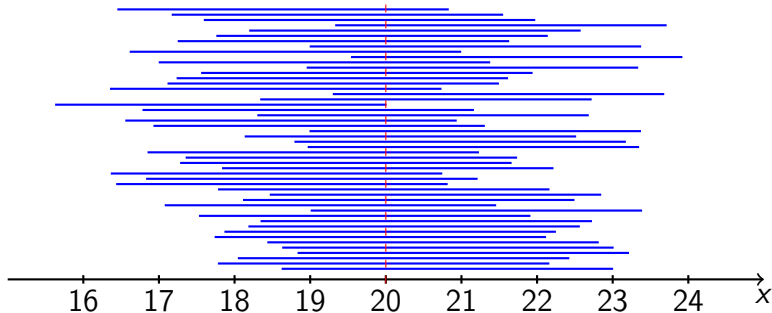


Tolkning av konfidensintervall

- ★ Tolkning tar utgangspunkt i uttrykket

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

- husk: tolkning av sannsynlighet, $P(A)$
- må tenke oss at vi gjentar forsøket mange ganger
- ★ Simuleringseksempel: X_1, X_2, \dots, X_{20} tilfeldig utvalg fra $N(20, 5^2)$ -populasjonen, $\alpha = 0.05$



Utledning av konfidensintervall

★ Situasjon: Anta X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utvalg fra $f(x; \theta)$ -populasjonen. Ønsker $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ .

- 1) Estimator for θ : $\hat{\theta}$
- 2) Sett $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot, \cdot)$ er en funksjon (uten andre ukjente parametre enn θ) slik at Z har en kjent sannsynlighetsfordeling (uten ukjente parametre).
- 3) Dermed har vi at

$$P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

- 4) Løs hver ulikhet med hensyn på θ (hver for seg), og sett deretter de to ulikhetene sammen igjen med θ i midten slik at man får

$$P\left(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)\right) = 1 - \alpha.$$

- 5) Konkluder: Et $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ er

$$\left[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)\right].$$

Konfidensintervall for μ i normalfordeling (σ^2 ukjent)

★ Situasjon: Anta X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utvalg fra $n(x; \mu, \sigma)$ -populasjonen. Ønsker $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ .

1) Estimator for μ : $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

2) Har at $\bar{X} \sim n(\bar{x}, \mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}})$, og dermed

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z; 0, 1).$$

Siden σ^2 er ukjent erstatter vi den med en estimator for σ^2 :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Tar dermed utgangspunkt i

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

Hvilken fordeling har T ? Først: Hvilken fordeling har S^2 ?

Regneregler for momentgenererende funksjoner

- i)* $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$
- ii)* $M_{aX}(t) = M_X(at)$
- iii)* La X_1, X_2, \dots, X_n være uavhengige SV med momentgenererende funksjoner $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots, M_{X_n}(t)$ og la $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Da er

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t).$$