Konfidensintervall for μ i normalfordeling (σ^2 kjent)

- ⋆ Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$-populasjonen. Ønsker $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1) Estimator for μ: $\widehat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2) Har at $\bar{X} \sim n(\bar{x}, \mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}})$, og dermed

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z; 0, 1).$$

3) Har dermed at

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

4) Løser hver ulikhet med hensyn på μ og får

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Konfidensintervall for μ i normalfordeling (σ^2 ukjent)

- ⋆ Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$-populasjonen. Ønsker $(1-\alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1) Estimator for μ: $\widehat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
2) Fant etter ganske mye regning at

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{n-1}$$

3) Har dermed at

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1 - \alpha.$$

4) Løser hver ulikhet med hensyn på μ og får

$$P\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Utledning av konfidensintervall

- ⋆ Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $f(x;\theta)$-populasjonen. Ønsker $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1) Estimator for θ: $\widehat{\theta}$

2) Sett $Z = h(\widehat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er en funksjon (uten andre ukjente parametre enn θ) slik at Z har en kjent sannsynlighetsfordeling (uten ukjente parametre).

3) Dermed har vi at

$$P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq h(\widehat{\theta}, \theta) \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

4) Løs hver ulikhet med hensyn på θ (hver for seg), og sett deretter de to ulikhetene sammen igjen med θ i midten slik at man får

$$P\left(\widehat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \widehat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = 1-\alpha.$$

5) Konkluder: Et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ er

$$\left[\widehat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n), \widehat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right].$$

Kjikvadrat- og t-fordeling

- Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$-populasjonen.
  - Estimator for μ: $\widehat{\mu} = \bar{X}$
  - Estimator for σ^2: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$
- Vi har da at

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2_n$$

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$