

Plan for dagens undervisning

- ★ Regne på eksempler/situasjoner som inkluderer
 - simulere diskrete stokastiske variabler
 - approksimere sannsynligheter ved stokastisk simulering
 - regne ut forventningsverdi og varians (for kontinuerlig fordelt stokastisk variabel)
 - simulere verdi for en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel
 - approksimere forventningsverdi ved stokastisk simulering
 - bruke stokastisk simulering til å avgjøre hvilke strategi som er best

Kombinatorikk

★ Fem telleregler

- Multiplikasjonssetningen

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

- Urnemodell: ordnet utvalg, trekker med tilbakelegging

$$n^r$$

- Urnemodell: ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Urnemodell: ikke-ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

- Inndeling i grupper

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

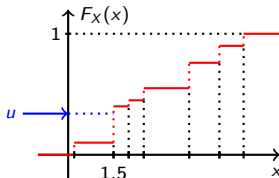
- ★ Må typisk kombinere multiplikasjonssetningen med en eller flere av de andre reglene

Simulere fra diskret og kontinuertlig fordeling

- ★ Simulere $X \sim f_X(x)$, X diskret stokastisk variabel

$$U \sim \text{Unif}[0, 1]$$

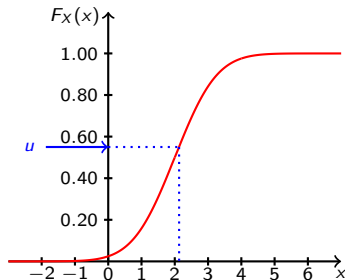
$$X = \min\{x : F_X(x) \geq U\}$$



- ★ Simulere $X \sim f_X(x)$, X kontinuertlig stokastisk variabel

$$U \sim \text{Unif}[0, 1]$$

$$X = F_X^{-1}(U)$$



Forventningsverdi, varians og standardavvik

Definisjon (Forventningsverdi)

La X være en stokastisk variabel med sannsynlighetsfordeling $f(x)$. Hvis X er en diskret stokastisk variabel er forventningsverdien til X gitt som

$$\mu = \mu_X = E[X] = \sum_x x \cdot f(x)$$

der summer er over alle mulige verdier for x . Hvis X er en kontinuerlig stokastisk variabel er forventningsverdien til X gitt som

$$\mu = \mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Definisjon (Varians)

Variansen til en stokastisk variabel X med forventningsverdi $E[X] = \mu$ er

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2].$$

Definisjon (Standardavvik)

Standardavviket til en stokastisk variabel X med forventningverdi $E[X] = \mu$ er

$$\sigma = \sigma_X = SD[X] = \sqrt{\text{Var}[X]} = \sqrt{E[(x - \mu)^2]}.$$

Approximere forventningsverdi ved stokastisk simulering

- ★ Merk at vi kan approksimere $E[g(X)]$ og $\text{Var}[g(X)]$ ved stokastisk simulering
- ★ Generer uavhengige realisasjoner $x_1, x_2, \dots, x_n$ fra $f_X(x)$
- ★ Da er

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) = \overline{g(x)}$$

$$\sigma_{g(X)}^2 = \text{Var}[g(X)] \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - \overline{g(x)})^2$$

Eksempel: Optimal vedlikeholdsstrategi

- ★ Situasjon: Har maskin som inneholder fem komponenter av samme type. Alle fem komponentene må fungere for at maskinen skal fungere. Hvis maskinen stoppes planlagt tar det en time å bytte ut en eller flere komponenter. Hvis maskinen stopper fordi en komponent svikter tar det tre timer å bytte ut en eller flere komponenter og få maskinen i gang igjen. Anta følgende kostnader:
 - Maskinstopp koster 25 000 kr pr time
 - En komponent koster 5 000 kr

Bestrakt følgende vedlikeholdsstrategier:

- i) Når maskinen stopper fordi en komponent svikter, bytt ut alle komponentene.
- ii) Hvis maskinen ikke har stoppet ved tid $E[T]$, bytt ut alle komponentene (planlagt). Hvis maskinen stopper fordi en komponent svikter før $E[T]$, gjør som i i).
- iii) Som i ii), men gjør planlagt bytte ved tid $\frac{1}{2}E[T]$.

- ★ Sannsynlighetstetthet for levetid for en komponent,

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\alpha} \exp\left\{-\frac{t^2}{\alpha}\right\}; & t \geq 0, \\ 0; & \text{ellers.} \end{cases}$$

- ★ Spørsmål: Hvilken strategi er mest lønnsom i det lange løp? Finn svar for $\alpha = \frac{24^2 \cdot 4^2}{\pi} = 2933.544$, som betyr at $E[T] = 24$.