

TMA4240 - Høst 2023

Temaer denne uka

- ▶ Stokastisk forsøk
- ▶ Venndiagram
- ▶ Uniform sannsynlighet model
- ▶ Kombinatorikk

Utfallsrom: hendelser og operasjoner på hendelser

Stokastisk forsøk

Et eksperiment der resultatet er underlagt tilfeldigheter.

Utfallsrom, (S)

Mengden av alle mulige utfall.

Hendelse

En hendelse A er en delmengde av S .

Operasjoner på hendelser.

- ▶ Snitt: $A \cap B = \{e \in S | e \in A \text{ og } e \in B\}$.
- ▶ Union: $A \cup B = \{e \in S | e \in A \text{ eller } e \in B\}$.
- ▶ Komplement: $A' = \{e \in S | e \notin A\}$.
- ▶ Venndiagram kan illustrere hendelser og operasjoner på hendelser.

Eks 1 - Stok forsøk

Vi kaster en pil på et tavla med radius 1 og registrerer posisjonen som (x, y)

- ▶ Hva er utfallsrommet?
- ▶ Skriv to mulige enkelt utfall
- ▶ Skriv to mulige hendelser

Eks 2 - Venn Diagram

3(a) Sigdcelleanemi

Innledning: Sigdcelleanemi er en alvorlig sykdom som forårsaker anemi, dvs lav blodprosent. Sigdcelleanemi er arvelig, og et barn får sykdommen dersom det arver et bestemt recessivt gen (a) fra både mor og far. Barnet får ikke sykdommen dersom det arver det dominante genet (A) fra minst en av sine foreldre.

En person har altså enten genotype AA , Aa eller aa . Personer med genotype aa har sigdcelleanemi, mens personer med AA eller Aa har ikke sykdommen. Et barn arver et gen fra hver av sine foreldre. Hvis en forelder har genotype Aa , vil et barn arve enten a eller A fra denne forelderens med sannsynlighet 0.5 for hver. Et barn arver gen fra mor og far uavhengig av hverandre.

Man sier at personer som har genotype Aa er bærere av sykdommen, de har ikke selv sigdcelleanemi men kan få barn som har sykdommen.

Betrakt nå et par hvor hverken mannen eller kvinnen har sigdcelleanemi, men vi vet ikke om de er bærere av sykdommen. Anta at mannen og kvinnen hver har en sannsynlighet på 8% for å være bærere av sykdommen (dette er andelen av den afroamerikanske befolkningen som er bærere) og at mannen og kvinnen er bærere eller ikke uavhengig av hverandre.

Vi skal i denne oppgaven regne på sannsynligheten for at dette paret får barn som har sigdcelleanemi eller som er bærere av sykdommen. Definer hendelsene

- M : Mannen er bærer av sigdcelleanemi,
- K : Kvinnen er bærer av sigdcelleanemi,
- D : Det første barnet paret får, har sigdcelleanemi, og
- B : Det første barnet paret får, er bærer av sigdcelleanemi.

Eks 3 - Venndiagram

13 4B

Innledning: La A , B og C være tre hendelser i et utfallsrom S .

Oppgave: Marker hvilke(t) av følgende utsagn som alltid er korrekt for tre hendelser $A, B, C \subseteq S$? *Hint: Tegn opp venndiagram og bruk dette til å finne hvilke utsagn som er korrekte.*

Velg ett eller flere alternativer

- ☐ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- ☐ $(A \cap B) \cap C' = (A \cap B)' \cup C$
- ☐ $A \setminus (B \cup C) = (A \cap B') \cap C'$

Sannsynlighet

Definisjon: Et sannsynlighetsmål P , på et utfallsrom S er et reel funksjon definert på hendelser, slik at:

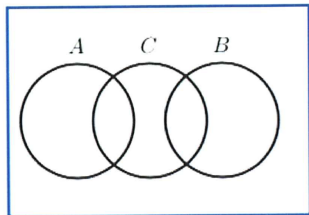
- ▶ $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subseteq S$
- ▶ $P(S) = 1$
- ▶ Hvis hendelser $A_1, A_2, \dots$ er parvis disjunkte ($A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$) så er

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Da kalles $[S, P]$ et sannsynlighetsrom.

Eks 4 - Sannsynlighet

La A, B, C være tre hendelser som kan representeres som:



Anta at

$$P(A) = 0.3,$$

$$P(B) = 0.4,$$

$$P(C) = 0.2,$$

$$P(A \cap C) = 0.1$$

$$P(B \cap C) = 0.1$$

Regn:

$$P(A \cap \overline{B})$$

$$P(A \cup \overline{B})$$

$$P(B \cap \overline{C})$$

$$P(B \cup \overline{C})$$

Uniform Sannsynlighet Model

- **Definisjon:** Hvis $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ og

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_1\}) = \dots = P(\{e_n\}) = w$$

så har vi en **uniform sannsynlighets** model

- **Teorem 1** Hvis $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ har en uniform sannsynlighets model så er

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_1\}) = \dots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$$

- **Teorem 2** Hvis $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ har en uniform sannsynlighets model, og $A = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_g}\}$ består av g utfall så er:

$$P(A) = \frac{g}{n} = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}}$$

Kombinatorikk - Multiplikasjonssetningen

- ▶ En operasjon kan utføres på n_1 måter, og for hver av disse kan en annen operasjon utføres på n_2 måter, og for hver kombinasjon av disse kan en tredje operasjon utføres på n_3 måter, osv. opp til n_k . Da kan de k operasjonene til sammen utføres på

$$n = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

måter.

Telle Regler

	Med Tilbakelegging	Uten Tilbakelegging
Ordered	n^r	${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ (Permutasjoner)
Uordered		$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (Combinasjoner)

Eks 5 - Kombinatorikk

Anta at vi gjentatte ganger trekker en kule med tilbakelegging fra en urne med 4 røde og 16 gule kuler. Anta at vi for hver trekning noterer oss fargen på kula vi trakk før vi legger kula tilbake.

På hvor mange måter kan vi:

- ▶ Trekke 5 kuler slik at man trekker ut en røde kule for første gang på trekning nummer 5?
- ▶ trekke 7 kuler slik at man trekker ut en rød kule for fjerde gang på trekning nummer 7?

Eks 6 - Kombinatorikk

- ▶ Hvor mange oddetall finnes det som har 8 siffer?

Eks 7 - Kombinatorikk

Regn ut sannsynligheten for at ved å kaste 3 mynter:

- ▶ får akkurat 2 hoder
- ▶ for ingen hode
- ▶ får minst ett hode
- ▶ tre hoder kommer ut

Bursdag Problem

Vi har 5 personer i et rom, hva er sannsynlighet at minst to har samme bursdag?

Bursdag Problem

