

TMA4240 - Høst 2023

Temaer denne uka

- ▶ Sannsynlighet for union av hendelser
- ▶ Betinget sannsynlighet og uavhengige hendelser
- ▶ Total sannsynlighet og Bayes regel
- ▶ Stokastiske variabler, punktsannsynlighet og sannsynlighetstetthet
- ▶ Kumulativ fordeling og kvantiler
- ▶ Simultanfordeling, betinget fordeling og uavhengige stokastiske variabler

Sannsynlighet

Definisjon: Et sannsynlighetsmål P , på et utfallsrom S er et reel funksjon definert på hendelser, slik at:

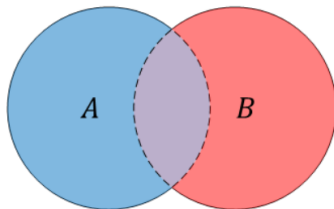
- ▶ $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subseteq S$
- ▶ $P(S) = 1$
- ▶ Hvis hendelser $A_1, A_2, \dots$ er parvis disjunkte ($A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$) så er

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Da kalles $[S, P]$ et sannsynlighetsrom.

Sannssynlighet av union

► $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



► Hvis A og B er disjunkte: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

► Hvis $A_1, A_2, \dots, A_n$ er parvis disjunkte

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

Betinget Sannsynlighet

- **Betinget sannsynlighet** For hendelser A og B er:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ hvis } P(A) > 0$$

- **Uavhengige hendelser** Hendelsene A og B er uavhengige hvis

$$P(A|B) = P(A) \text{ for } P(A) > 0$$

Oppgave 1.

La A og B være to hendelser i et utfallsrom. Det oppgis at $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.3$ og $P(A \cup B) = 0.6$.

- Er hendelsene A og B disjunkte?

(Mentimeter)

Oppgave 1.

La A og B være to hendelser i et utfallsrom. Det oppgis at $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.3$ og $P(A \cup B) = 0.6$.

- ▶ Er hendelsene A og B disjunkte?
- ▶ Er hendelsene A og B uavhengige?

(Mentimeter)

Oppgave 2: Eksam Des 2011

Vi tenker oss to oljefelt. Hendelsen A = "Oljefunn på felt 1", mens den komplementære hendelsen A^c = "Ingen olje på felt 1".

Tilsvarende er hendelsen B = "oljefunn på felt 2", mens B^c = "Ingen olje på felt 2".

Vi får oppgitt at $P(A \cap B) = 0.05$, $P(A^c \cap B) = 0.1$,
 $P(A \cap B^c) = 0.15$ og $P(A^c \cap B^c) = 0.7$

- Tegn et Venn diagram for hendelsene.

Oppgave 2: Eksam Des 2011

Vi tenker oss to oljefelt. Hendelsen A = "Oljefunn på felt 1", mens den komplementære hendelsen A^c = "Ingen olje på felt 1".

Tilsvarende er hendelsen B = "oljefunn på felt 2", mens B^c = "Ingen olje på felt 2".

Vi får oppgitt at $P(A \cap B) = 0.05$, $P(A^c \cap B) = 0.1$,
 $P(A \cap B^c) = 0.15$ og $P(A^c \cap B^c) = 0.7$

- ▶ Tegn et Venn diagram for hendelsene.
- ▶ Finn sannsynligheten for olje på felt 1.

Oppgave 2: Eksam Des 2011

Vi tenker oss to oljefelt. Hendelsen A = "Oljefunn på felt 1", mens den komplementære hendelsen A^c = "Ingen olje på felt 1".

Tilsvarende er hendelsen B = "oljefunn på felt 2", mens B^c = "Ingen olje på felt 2".

Vi får oppgitt at $P(A \cap B) = 0.05$, $P(A^c \cap B) = 0.1$, $P(A \cap B^c) = 0.15$ og $P(A^c \cap B^c) = 0.7$

- ▶ Tegn et Venn diagram for hendelsene.
- ▶ Finn sannsynligheten for olje på felt 1.
- ▶ Anta at man har funnet olje på felt 2. Hva er nå sannsynlighet for olje på felt 1?

Oppgave 2: Eksam Des 2011

Vi tenker oss to oljefelt. Hendelsen A = "Oljefunn på felt 1", mens den komplementære hendelsen A^c = "Ingen olje på felt 1".

Tilsvarende er hendelsen B = "oljefunn på felt 2", mens B^c = "Ingen olje på felt 2".

Vi får oppgitt at $P(A \cap B) = 0.05$, $P(A^c \cap B) = 0.1$, $P(A \cap B^c) = 0.15$ og $P(A^c \cap B^c) = 0.7$

- ▶ Tegn et Venn diagram for hendelsene.
- ▶ Finn sannsynligheten for olje på felt 1.
- ▶ Anta at man har funnet olje på felt 2. Hva er nå sannsynlighet for olje på felt 1?
- ▶ Anta at man har påvist at felt 2 ikke inneholder olje. Hva er nå sannsynligheten for olje på felt 1?

Oppgave 2: Eksam Des 2011

Vi tenker oss to oljefelt. Hendelsen A = "Oljefunn på felt 1", mens den komplementære hendelsen A^c = "Ingen olje på felt 1".

Tilsvarende er hendelsen B = "oljefunn på felt 2", mens B^c = "Ingen olje på felt 2".

Vi får oppgitt at $P(A \cap B) = 0.05$, $P(A^c \cap B) = 0.1$, $P(A \cap B^c) = 0.15$ og $P(A^c \cap B^c) = 0.7$

- ▶ Tegn et Venn diagram for hendelsene.
- ▶ Finn sannsynligheten for olje på felt 1.
- ▶ Anta at man har funnet olje på felt 2. Hva er nå sannsynlighet for olje på felt 1?
- ▶ Anta at man har påvist at felt 2 ikke inneholder olje. Hva er nå sannsynligheten for olje på felt 1?
- ▶ Er hendelsene A og B uavhengige?

Oppgave 3

Vi ser på to hendelser, A og B , slik at $P(A) > 0$ og $P(B) > 0$.

Påstanden “Dersom A og B er uavhengige hendelser, så er $P(A|B)=P(B|A)$ ” er

- ▶ Alltid sant
- ▶ Sann kun dersom A og B er disjunkte hendelser
- ▶ Sann kun dersom A og B er like sannsynlige
- ▶ Alltid usant

(Mentimeter)

Oppgave 4

Er hendelser A og B uavhengige?

1. Vi kaster 2 terninger.
A="vi får 5 på terning 1" B="Vi får 5 på terning 2"
2. Vi har et urne med 3 blå og 3 røde kuler. Vi trekker 2 kuler UTEN tilbakelegging. A="vi får blå kule på første trekk" og B="Vi får blå kule på andre trekk"
3. Vi har:

	Gift	Ikke Gift	Tot
Mann	30	90	120
Kvinne	20	60	80
Tot	50	150	200

A="Mann" og B="Gift"

Oppgave 5

En person bruker bilen sin 30 % av tiden, går 30 % av tiden og kjører buss 40 % av tiden mens han går på jobb. Han er forsinket 10 % av tiden når han går; han er forsinket 3 % av tiden når han kjører; og han er forsinket 7 % av tiden han tar bussen.

- ▶ Hva er sannsynligheten for at han tok bussen hvis han kom for sent?

Oppgave 5

En person bruker bilen sin 30 % av tiden, går 30 % av tiden og kjører buss 40 % av tiden mens han går på jobb. Han er forsinket 10 % av tiden når han går; han er forsinket 3 % av tiden når han kjører; og han er forsinket 7 % av tiden han tar bussen.

- ▶ Hva er sannsynligheten for at han tok bussen hvis han kom for sent?
- ▶ Hva er sannsynligheten for at han gikk hvis han er i tide?

Oppgave 6

Anta at sannsynligheten for å ha tuberkulose (TB) er 1%. Anta videre at en test gir korrekt diagnose (det betyr at testen er positiv gitt at man er syk) med sannsynlighet 99% og gir en falsk positiv (det betyr at testen er positiv selv om man ikke er syk) med sannsynlighet 9.6%.

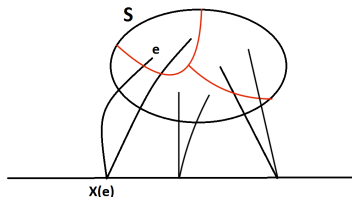
Hvis man får positiv test, hva er sannsynlighet at man har TB?

Stokastisk Variabel (SV)

En **stokastisk variabel** X er en reel funksjon på utfallsrommet S

$$X : S \rightarrow \mathcal{R}$$

$$X(e) = x$$



- ▶ Stor bokstav X for den stokastiske variabelen
- ▶ Liten bokstav x for en bestemt realisering $X(e) = x$

Stokastisk Variabel

To situasjoner:

- ▶ **Diskret** hvis mengden av mulige realisering er endelig eller tellbar
- ▶ **Kontinuerlig** hvis mengden av mulig realisering er ikke tellbart, typisk $\mathcal{R}$, eller (a, ∞) eller (a, b)

Diskret Stokastisk variabel

Hvordan beskriver vi en diskret SV X

- ▶ **Sannsynlighet fordeling** (punkt sannsynlighet)

$$P(X = x) = f(x)$$

- ▶ Merk: $P(X = x) = P(e \in \mathcal{S} | X(e) = x)$
- ▶ Egenskaper til f
 - ▶ $0 \leq f(x) \leq 1$ for alle mulige verdier av x
 - ▶ $\sum_x f(x) = 1$
- ▶ **Kumulative sannsynlighet fordeling**

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

- ▶ Egenskaper til F
 - ▶ $0 \leq F(x) \leq 1$
 - ▶ $F(x)$ er en voksende trappe-funksjon

Kontinuerlig stokastisk variabel - I

- ▶ **Sannsynlighet fordeling** (sannsynlighetstetthet)

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

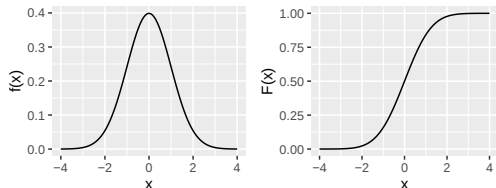
- ▶ Egenskaper til f
 - ▶ $f(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathcal{R}$
 - ▶ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

- ▶ **kumulative sannsynlighet fordeling**

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$$

- ▶ Egenskaper til F
 - ▶ $0 \leq F(x) \leq 1$
 - ▶ $F(x)$ er en stigende, kontinuerlig funksjon

Kontinuerlig Stokastisk variabel - II



- ▶ $f(x) > 1$ er mulig. Dette er ikke en sannsynlighet
- ▶ Differanse mellom “<” of “ $\leq$ ” er ikke viktig

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

- ▶ For en kontinuertlig SV er

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

der den deriverte eksisterer.

- ▶ $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Oppgave 7

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med utfallsrom $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Punktsannsynlighetene for hvert utfall er gitt i følgende tabell

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1

- Bestem sannsynlighetene $P(X \geq 0)$ og $P(X \geq 0 | X \leq 1)$

Oppgave 7

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med utfallsrom $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Punktsannsynlighetene for hvert utfall er gitt i følgende tabell

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1

- ▶ Bestem sannsynlighetene $P(X \geq 0)$ og $P(X \geq 0 | X \leq 1)$
- ▶ Tegn sannsynlighetsfordeling of kumulativ sannsynlighetsfordeling

Oppgave 8

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

der k er en konstant.

- Bestem k slik at $f(x)$ er en gyldig sannsynlighetstetthet, og skisser $f(x)$

Oppgave 8

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

der k er en konstant.

- ▶ Bestem k slik at $f(x)$ er en gyldig sannsynlighetstetthet, og skisser $f(x)$
- ▶ Beregn sannsynlighetene $P(X \leq 0.6)$ og $P(X \leq 0.8 | X > 0.6)$