

TMA4240 - Høst 2023

Forberedelse

Søk “Roll a Dice” på Google, vi skal bruke det etterpå!

Temaer denne uka

- ▶ Simultan fordeling
- ▶ Marginal fordeling
- ▶ Stokastisk simulering og pseudo-tilfeldige tall
- ▶ Forventning og varians

Simultan sannsynlighetsfordeling $f(\cdot, \cdot)$, til X og Y

► diskret:

- $f(x; y) \geq 0$ for alle mulige realiseringer av x og y
- $\sum_x \sum_y f(x; y) = 1$
- For en delmengde av de mulige realiseringene A er

$$P((X; Y) \in A) = \sum_{(x; y) \in A} f(x; y)$$

► kontinuerlige:

- $f(x; y) \geq 0$ for alle $x; y \in \mathbb{R}^2$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; y) dx dy = 1$
- For en delmengde av de mulige realiseringene $A \in \mathbb{R}^2$ er

$$P((X; Y) \in A) = \int \int_A f(x, y) dx dy$$

Marginal Fordeling

Marginalfordelingene til X og Y er

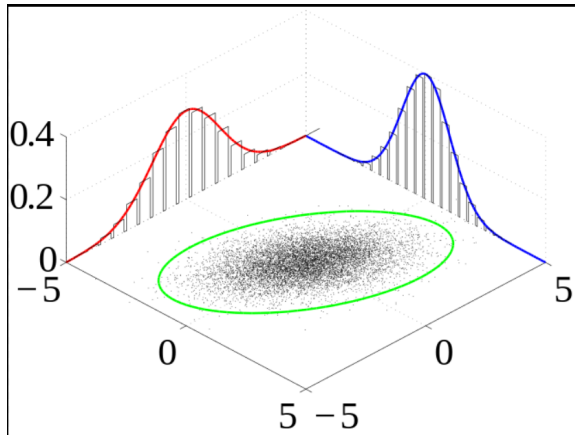
► **diskret**

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \text{ og } h(y) = \sum_x f(x, y)$$

► **kontinuerlige**

$$g(x) = \int_y f(x, y) dy \text{ og } h(y) = \int_x f(x, y) dx$$

Marginal Fordeling - kontinuerlig



Oppgave 1

La X og Y være diskret fordelte stokastiske variabler der $X, Y \in \{0, 1, 2\}$. La $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ være simultan punktsannsynlighet for X og Y og anta at $f(x, y)$ er som angitt i følgende tabell.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0.10	0.25	0.15
1	0.06	0.15	0.09
2	0.04	0.10	0.06

► Finn $P(X > Y)$

Oppgave 1

La X og Y være diskret fordelte stokastiske variabler der $X, Y \in \{0, 1, 2\}$. La $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ være simultan punktsannsynlighet for X og Y og anta at $f(x, y)$ er som angitt i følgende tabell.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0.10	0.25	0.15
1	0.06	0.15	0.09
2	0.04	0.10	0.06

- ▶ Finn $P(X > Y)$
- ▶ Finn marginalfordelingen $g(x)$ til X og marginalfordelingen $h(y)$ til Y

Oppgave 1

La X og Y være diskret fordelte stokastiske variabler der $X, Y \in \{0, 1, 2\}$. La $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ være simultan punktsannsynlighet for X og Y og anta at $f(x, y)$ er som angitt i følgende tabell.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0.10	0.25	0.15
1	0.06	0.15	0.09
2	0.04	0.10	0.06

- ▶ Finn $P(X > Y)$
- ▶ Finn marginalfordelingen $g(x)$ til X og marginalfordelingen $h(y)$ til Y
- ▶ Er X og Y uavhengige?

Oppgave 2 (Eksam Nov 2020)

Innledning: La X være en stokastisk variabel med fordeling

$$f(x) = \begin{cases} 2x \exp(-x^2) & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Oppgave: Finn medianen til X . Angi verdien med to siffer etter komma.

Oppgave 3 (Eksam Des 2009)

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(4x + 1) & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

La også Y være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel, og la betinget sannsynlighetstetthet for Y gitt $X = x$ være gitt ved

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{4x+2y}{4x+1} & \text{for } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- Finn simultan sannsynlighetstetthet for X og Y .

Oppgave 3 (Eksam Des 2009)

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(4x + 1) & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

La også Y være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel, og la betinget sannsynlighetstetthet for Y gitt $X = x$ være gitt ved

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{4x+2y}{4x+1} & \text{for } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- ▶ Finn simultan sannsynlighetstetthet for X og Y .
- ▶ Finn marginal sannsynlighetstetthet for Y .

Oppgave 3 (Eksam Des 2009)

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(4x + 1) & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

La også Y være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel, og la betinget sannsynlighetstetthet for Y gitt $X = x$ være gitt ved

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{4x+2y}{4x+1} & \text{for } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- ▶ Finn simultan sannsynlighetstetthet for X og Y .
- ▶ Finn marginal sannsynlighetstetthet for Y .
- ▶ Finn sannsynligheten $P(Y \leq X)$.

Stokastisk simulering

- ▶ Pseudo-stokastiske tall

Oppgave 4

Anta at X er en SV med fordeling

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x > 0$$

Anta at du kan simulere $U \sim \text{Unif}(0, 1)$.

Hvordan kan du bruke det for å simulere verdier fra $f(x)$?

Forventningsverdi og varians

For den SV $X \sim f(x)$ har vi

- ▶ Forventningsverdi

- ▶ **Diskret:** $\mu_X = E[X] = \sum_x x f(x)$

- ▶ **Kontinuerlig:** $\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

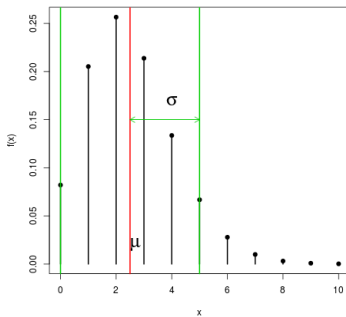
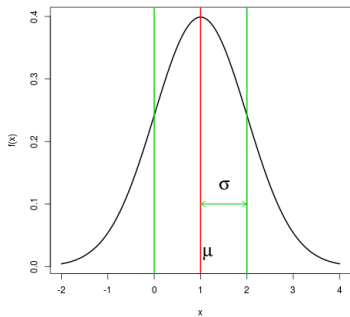
- ▶ Varians

$$\sigma_X^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2]$$

- ▶ Standardavvik

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Forventningsverdi og varians



Oppgave 5

Anta at X er en diskre SV med fordeling:

$$f(x) = \frac{1}{6}, \text{ for } x = 1, \dots, 6$$

► Finn $E(X)$

Oppgave 5

Anta at X er en diskre SV med fordeling:

$$f(x) = \frac{1}{6}, \text{ for } x = 1, \dots, 6$$

- ▶ Finn $E(X)$
- ▶ Finn $E(X)$ med bruk av stokastisk simulering

Oppgave 5

Anta at X er en diskre SV med fordeling:

$$f(x) = \frac{1}{6}, \text{ for } x = 1, \dots, 6$$

- ▶ Finn $E(X)$
- ▶ Finn $E(X)$ med bruk av stokastisk simulering
- ▶ Finn $E(X^2)$

Oppgave 5

Et vindkraftselskap vurderer å søke om konsesjon for bygging av en vindkraftpark i et område nærheten av Trondheim. Vi skal her anta at vindhastigheten (målt meter per sekund) på gitte måletidspunkt er en positiv kontinuerlig stokastisk variabel X med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) & \text{for } x \geq 0 \\ 0, & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

a) Finn kumulativ fordeling til X . Den aktuelle vindturbin typen genererer bare elektrisitet dersom vindhastigheten er større enn 3m/s. Dersom vi antar at parameteren $a = 8\text{m/s}$, hva blir da sannsynligheten for at en vindturbin ikke genererer elektrisitet på et gitt tidspunkt?

Eksamen Mai 2022

Et vindkraftselskap vurderer å søke om konsesjon for bygging av en vindkraftpark i et område nærheten av Trondheim. Vi skal her anta at vindhastigheten (målt meter per sekund) på gitte måletidspunkt er en positivt kontinuerlig stokastisk variabel X med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} \exp(-\frac{x^2}{2a^2}) & \text{for } x \geq 0 \\ 0, & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

a) Finn kumulativ fordeling til X . Den aktuelle vindturbin typen genererer bare elektrisitet dersom vindhastigheten er større enn 3m/s. Dersom vi antar at parameteren $a = 8\text{m/s}$, hva blir da sannsynligheten for at en vindturbin ikke genererer elektrisitet på et gitt tidspunkt?

b) Vis at forventningsverdien til X (forventet vindhastighet) er gitt ved $E(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Det oppgis at $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Eksamen Mai 2022

Et vindkraftselskap vurderer å søke om konsesjon for bygging av en vindkraftpark i et område nærheten av Trondheim. Vi skal her anta at vindhastigheten (målt meter per sekund) på gitte måletidspunkt er en positiv kontinuerlig stokastisk variabel X med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} \exp(-\frac{x^2}{2a^2}) & \text{for } x \geq 0 \\ 0, & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

a) Finn kumulativ fordeling til X . Den aktuelle vindturbintypen genererer bare elektrisitet dersom vindhastigheten er større enn 3m/s. Dersom vi antar at parameteren $a = 8\text{m/s}$, hva blir da sannsynligheten for at en vindturbine ikke genererer elektrisitet på et gitt tidspunkt?

b) Vis at forventningsverdien til X (forventet vindhastighet) er gitt ved $E(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Det oppgis at $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) Finn fordelingen til minimum av de n målingene, altså første ordningsvariabel $X_{(1)}$ og bestem $P(X_{(1)} < 3)$ gitt at $n = 3$ og at a har samme verdi som i punkt a).