

TMA4240 - Høst 2023

Tema for uka

- ▶ Viktig diskre fordeling
- ▶ Normal fordeling

Oppgave 1 - (Dec 2013)

Oppgave 2

Agent John Bang går regelmessig til skytetrening. Erfaring sier at hans sannsynlighet for et treff er $p = 0.8$. I en treningssesjon skyter han 20 skudd. Anta at skuddene er uavhengige og at hvert enkeltskudd er enten en treff eller bom.

- Hva er forventet antall treff?

Oppgave 1 - (Dec 2013)

Oppgave 2

Agent John Bang går regelmessig til skytetrening. Erfaring sier at hans sannsynlighet for et treff er $p = 0.8$. I en treningssesjon skyter han 20 skudd. Anta at skuddene er uavhengige og at hvert enkeltskudd er enten en treff eller bom.

- ▶ Hva er forventet antall treff?
- ▶ Hva er sannsynligheten for at han treffer flere enn forventet?

Oppgave 1 - (Dec 2013)

Oppgave 2

Agent John Bang går regelmessig til skytetrening. Erfaring sier at hans sannsynlighet for et treff er $p = 0.8$. I en treningssesjon skyter han 20 skudd. Anta at skuddene er uavhengige og at hvert enkeltskudd er enten en treff eller bom.

- ▶ Hva er forventet antall treff?
- ▶ Hva er sannsynligheten for at han treffer flere enn forventet?
- ▶ Hva er den betingete sannsynligheten for at han treffer 20 når vi vet at han treffer flere enn forventet?

Oppgave 2 - (Aug 2019)

Oppgave 6

La X_1 , X_2 og X_3 være uavhengige poissonfordelte stokastiske variabler med forventningsverdi henholdsvis μ_1 , μ_2 og μ_3 .

La

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis } X_i = X_3 = 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (5)$$

for $i = 1, 2$.

- a) Vis at Z_i er bernoullifordelt, det vil si binomisk fordelt med $n = 1$ delforsøk, med suksessannsynlighet $p_i = e^{-(\mu_i + \mu_3)}$, og bruk dette til å finne forventningsverdien og variansen til Z_i for $i = 1, 2$.

Oppgave 2 - (Aug 2019)

Oppgave 6

La X_1 , X_2 og X_3 være uavhengige poissonfordelte stokastiske variabler med forventningsverdi henholdsvis μ_1 , μ_2 og μ_3 .

La

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis } X_i = X_3 = 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (5)$$

for $i = 1, 2$.

- a) Vis at Z_i er bernoullifordelt, det vil si binomisk fordelt med $n = 1$ delforsøk, med suksessannsynlighet $p_i = e^{-(\mu_i + \mu_3)}$, og bruk dette til å finne forventningsverdien og variansen til Z_i for $i = 1, 2$.

Bruk dette til å utlede et uttrykk for kovariansen mellom Z_1 og Z_2 , det vil si $\text{Cov}(Z_1, Z_2)$.

Oppgave 3 - (Des 2021)

- 4(a) Innledning:** Anta at du er blitt bedt om å undersøke antall ulykker på byggeplasser i Norge og har samlet inn informasjon om ulykker fra $n = 34$ byggeplasser. Anta at ulykker på ulike byggeplasser skjer uavhengig av hverandre og at ulykker på byggeplass nummer i skjer ifølge en poissonprosess med intensitet λm_i , der m_i angir antall ansatte på denne byggeplassen og λ er en parameter som antas felles for alle byggeplasser. La X_i være antall ulykker på byggeplass nummer i i løpet av $t = 1$ år. Dermed er X_i poissonfordelt med forventningsverdi lik λm_i og har punktsannsynlighet

$$f(x_i) = \frac{(\lambda m_i)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda m_i}, x_i = 0, 1, 2, \dots$$

Oppgave: For $\lambda = 0.020$ og $m_i = 50$, besvar følgende spørsmål.

- Hva er sannsynligheten for at det blir minst en ulykke på byggeplass nummer i ?
- Gitt at det er minst en ulykke på byggeplass nummer i , hva er sannsynligheten for at det er mer enn en ulykke på denne byggeplassen?
- Gitt at det er minst en ulykke på byggeplass nummer i , hva er sannsynligheten for at det er maksimalt tre ulykker på denne byggeplassen?

Oppgave 4 - Regneregler om forventinsverdi og varians

La X_i , $i = 1, \dots, n$ være uavhengige identiske fordelte variable med $E(X_i) = \mu$ og $Var(X_i) = \sigma^2$, og la a_i , $i = 1, \dots, n$ være en sett med konstanter. Et veid gjennomsnitt av X_i er da gitt ved

$$Z = \frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

- Finn $E(Z)$ og $Var(Z)$. Hva blir resultatet dersom $a_i = a$ er konstant for alle i ?

Oppgave 5 - (Mai 2019)

Oppgave 6 Sannsynlighet

La X og Y være to uavhengige normalfordelte stokastiske variabler med kjente forventningsverdier, henholdsvis, $\mu_X = 1$ og $\mu_Y = 0$, og kjent standardavvik $\sigma_X = \sigma_Y = 1$.

a) Finn $P(2X > 3)$.

Finn $P(2X > 3 \mid Y > 0)$.

Oppgave 6

Anta at SV X “høyde til menn i Norge” er normal fordelt med $\mu = 180$ og $\sigma = 6$

- Finn $P(X > 180)$

Oppgave 6

Anta at SV X “høyde til menn i Norge” er normal fordelt med $\mu = 180$ og $\sigma = 6$

- ▶ Finn $P(X > 180)$
- ▶ Finn $P(170 < X < 180)$

Oppgave 6

Anta at SV X “høyde til menn i Norge” er normal fordelt med $\mu = 180$ og $\sigma = 6$

- ▶ Finn $P(X > 180)$
- ▶ Finn $P(170 < X < 180)$
- ▶ Finn $P(X > 190 | X > 180)$

Oppgave 6

Anta at SV X “høyde til menn i Norge” er normal fordelt med $\mu = 180$ og $\sigma = 6$

- ▶ Finn $P(X > 180)$
- ▶ Finn $P(170 < X < 180)$
- ▶ Finn $P(X > 190 | X > 180)$
- ▶ Finn c slik at $P(X > c) = 0.01$

Oppgave 6

Anta at SV X “høyde til menn i Norge” er normal fordelt med $\mu = 180$ og $\sigma = 6$

- ▶ Finn $P(X > 180)$
- ▶ Finn $P(170 < X < 180)$
- ▶ Finn $P(X > 190 | X > 180)$
- ▶ Finn c slik at $P(X > c) = 0.01$
- ▶ Finn øvre 0.1 kvantil til X

Oppgave 7

Oppgave 59 Trykkfeil i et manuskript — Eksamen januar 1995, oppgave 4 av 4

Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider, antas å være en Poissonfordelt stokastisk variabel med parameter λs , dvs.

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp(-\lambda s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En korrekturleser som leser korrektur på manuskriptet antas å oppdage hver trykkfeil med sannsynlighet p og ikke oppdage trykkfeilen med sannsynlighet $1 - p$. La X være antall feil korrekturleseren finner dersom han leser igjennom manuskriptet en gang. Vi skal anta at X gitt $N = n$ er binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

- a) Hvilken betingelse må vi i tillegg anta dersom vår antagelse om at $X|N=n$ er binomisk fordelt, skal være korrekt?
- ✓ Dersom $\lambda = 2$ og manuskriptet er på $s = 8$ sider, hva er da sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?
 - ✓ Dersom vi vet at manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og at $p = 0.6$, hva er da sannsynligheten for at korrekturleseren vil finne alle trykkfeilene?

Oppgave 7

Oppgave 59 Trykkfeil i et manuskript — Eksamen januar 1995, oppgave 4 av 4

Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider, antas å være en Poissonfordelt stokastisk variabel med parameter λs , dvs.

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp(-\lambda s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En korrekturleser som leser korrektur på manuskriptet antas å oppdage hver trykkfeil med sannsynlighet p og ikke oppdage trykkfeilen med sannsynlighet $1 - p$. La X være antall feil korrekturleseren finner dersom han leser igjennom manuskriptet en gang. Vi skal anta at X gitt $N = n$ er binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

- a) Hvilken betingelse må vi i tillegg anta dersom vår antagelse om at $X|N=n$ er binomisk fordelt, skal være korrekt?
 - ✓ Dersom $\lambda = 2$ og manuskriptet er på $s = 8$ sider, hva er da sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?
 - ✓ Dersom vi vet at manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og at $p = 0.6$, hva er da sannsynligheten for at korrekturleseren vil finne alle trykkfeilene?

La Y_k være antall trykkfeil som gjenstår etter at korrekturleseren har lest igjennom manuskriptet k uavhengige ganger ($k = 1, 2, \dots$), dvs. Y_1 er antall trykkfeil som gjenstår etter en gjennomlesning.

- b) Finn simultanfordelingen til Y_1 og N , og bruk den til å finne (marginal)fordelingen til Y_1 . Hva er fordelingen til Y_k ?