

TMA4240 - Høst 2023

Tema for uka

- ▶ Viktig kontinuertlig fordeling
- ▶ Transformasjon av stokastisk variabel
- ▶ Feilforplantningsformelen

Oppgave 1 - Poisson og eksponensiell

Politiet vil aksjonere mot ulovlig mobilbruk i bil, og gjennomfører kontroll ved Lerkendal-rundkjøringen.

- ▶ Antar at antall bilførere Y som blir bøtelagt i løpet av t timer er Poisson-fordelt med intensitet $\lambda = 5$
- ▶ La X være tid fra kontrollen starter til første bilfører blir bøtelagt.

Oppgave

- ▶ Hva er foreling til X ?

Oppgave 1 - Poisson og eksponensiell

Politiet vil aksjonere mot ulovlig mobilbruk i bil, og gjennomfører kontroll ved Lerkendal-rundkjøringen.

- ▶ Antar at antall bilførere Y som blir bøtelagt i løpet av t timer er Poisson-fordelt med intensitet $\lambda = 5$
- ▶ La X være tid fra kontrollen starter til første bilfører blir bøtelagt.

Oppgave

- ▶ Hva er foreling til X ?
- ▶ Hva er forventet tid til første bøtelegging?

Oppgave 1 - Poisson og eksponensiell

Politiet vil aksjonere mot ulovlig mobilbruk i bil, og gjennomfører kontroll ved Lerkendal-rundkjøringen.

- ▶ Antar at antall bilførere Y som blir bøtelagt i løpet av t timer er Poisson-fordelt med intensitet $\lambda = 5$
- ▶ La X være tid fra kontrollen starter til første bilfører blir bøtelagt.

Oppgave

- ▶ Hva er foreling til X ?
- ▶ Hva er forventet tid til første bøtelegging?
- ▶ Hvor sannsynlig er det at første bot blir skrevet ut før det er gått 20 min?

Oppgave 1 - Poisson og eksponensiell

Politiet vil aksjonere mot ulovlig mobilbruk i bil, og gjennomfører kontroll ved Lerkendal-rundkjøringen.

- ▶ Antar at antall bilførere Y som blir bøtelagt i løpet av t timer er Poisson-fordelt med intensitet $\lambda = 5$
- ▶ La X være tid fra kontrollen starter til første bilfører blir bøtelagt.

Oppgave

- ▶ Hva er foreling til X ?
- ▶ Hva er forventet tid til første bøtelegging?
- ▶ Hvor sannsynlig er det at første bot blir skrevet ut før det er gått 20 min?
- ▶ Dersom ingen er bøtelagt etter 20 min., hva er sannsynligheten for at den første bot ikke blir skrevet ut i løpet av de neste 20 min.?

Oppgave 2 (nov 2018)

Oppgave 1 La X være en stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Betrakt $Y = X^2$.

a) Finn den kumulative fordelingen til Y .

Finn sannsynlighetstettheten til Y .

Finn $E(2Y - Y^2)$.

Oppgave 3

La X være IQ score til en tilfeldig person. Anta at $X \sim N(100, 16^2)$.
Anta videre at grensen for å være med på MENSA er 132.86

- ▶ Hva er sanns. for at en tilfeldig person er over grensa?

Oppgave 3

La X være IQ score til en tilfeldig person. Anta at $X \sim N(100, 16^2)$.
Anta videre at grensen for å være med på MENSA er 132.86

- ▶ Hva er sanns. for at en tilfeldig person er over grensa?
- ▶ Hva er sanns. for at den med høyeste score i en gruppe av 20 er over grensa?

Oppgave 3

La X være IQ score til en tilfeldig person. Anta at $X \sim N(100, 16^2)$.
Anta videre at grensen for å være med på MENSA er 132.86

- ▶ Hva er sanns. for at en tilfeldig person er over grensa?
- ▶ Hva er sanns. for at den med høyeste score i en gruppe av 20 er over grensa?
- ▶ Hvor mange personer trenger jeg for å ha sanns. over 99% at den med høyeste score er over grensa?

Oppgave 4 (nov 2018)

- 1(e) **Innledning:** La X og Y være to uavhengige stokastiske variabler som begge er geometrisk fordelt med parameter p , dvs

$$X \sim g(x; p) = p(1 - p)^{x-1}; x = 1, 2, \dots \text{ og } Y \sim g(y; p) = p(1 - p)^{y-1}; y = 1, 2, \dots$$

La $Z = \min(X, Y)$. Du kan i denne oppgaven få bruk for formelen for en geometrisk rekke,

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Oppgave: Hva er punktsannsynligheten $f_Z(z)$ for Z ?

Velg ett alternativ

- ☐ $f_Z(z) = (1 - p)^{2(z-1)}p(2 - p); z = 1, 2, \dots$
- ☐ $f_Z(z) = 1 - (1 - p)^{2z}; z = 1, 2, \dots$
- ☐ $f_Z(z) = (1 - (1 - p)^z)^2; z = 1, 2, \dots$
- ☐ $f_Z(z) = p^2(1 - p)^{2(z-1)}; z = 1, 2, \dots$
- ☐ $f_Z(z) = -2(1 - p)^{2z} \ln(1 - p); z = 1, 2, \dots$

Feilforplantningsformelen

★ Situasjon:

- har flere uavhengige stokastiske variabler: X , Y , Z
- er interessert en en funksjon av disse

$$V = g(X, Y, Z)$$

- ønsker å approksimere $E[V]$ og $\text{Var}[V]$

★ Bruker Taylors formel for rekkeutvikling av $g(x, y, z)$

- rekkeutvikler x om $\mu_X = E[X]$, y om $\mu_Y = E[Y]$, og z om $\mu_Z = E[Z]$
- approksimerer ved kun å ta med opp til første ordens ledd

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &\approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) + \frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (x - \mu_X) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (y - \mu_Y) + \frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (z - \mu_Z) \end{aligned}$$

★ Får dermed at

$$\begin{aligned} E[V] &= E[g(X, Y, Z)] \approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \\ \text{Var}[V] &= \text{Var}[g(X, Y, Z)] \approx \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[X] + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[Y] \\ &\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[Z] \end{aligned}$$

★ Den siste av disse formlene kalles (Gauss) feilforplantningsformel

Oppgave 5

Anta at vi måler 3 uavhengige variabler som

$$x = 10 \pm 2, \quad y = 7 \pm 1, \quad \theta = 0.698 \pm 0.052$$

Anta at vi er interessert i størrelse

$$q = g(x, y, \theta) = \frac{x + 2}{x + y \cos(4\theta)}$$

Bruk feilforplantningsformelen for å approksimerer $E(q)$ og $SD(q)$

Oppgave 6

Oppgave 59 Trykkfeil i et manuskript — Eksamen januar 1995, oppgave 4 av 4

Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider, antas å være en Poissonfordelt stokastisk variabel med parameter λs , dvs.

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp(-\lambda s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En korrekturleser som leser korrektur på manuskriptet antas å oppdage hver trykkfeil med sannsynlighet p og ikke oppdage trykkfeilen med sannsynlighet $1 - p$. La X være antall feil korrekturleseren finner dersom han leser igjennom manuskriptet en gang. Vi skal anta at X gitt $N = n$ er binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

- a) Hvilken betingelse må vi i tillegg anta dersom vår antagelse om at $X|N=n$ er binomisk fordelt, skal være korrekt?
- ✓ Dersom $\lambda = 2$ og manuskriptet er på $s = 8$ sider, hva er da sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?
 - ✓ Dersom vi vet at manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og at $p = 0.6$, hva er da sannsynligheten for at korrekturleseren vil finne alle trykkfeilene?

Oppgave 6

Oppgave 59 Trykkfeil i et manuskript — Eksamen januar 1995, oppgave 4 av 4

Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider, antas å være en Poissonfordelt stokastisk variabel med parameter λs , dvs.

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp(-\lambda s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En korrekturleser som leser korrektur på manuskriptet antas å oppdage hver trykkfeil med sannsynlighet p og ikke oppdage trykkfeilen med sannsynlighet $1 - p$. La X være antall feil korrekturleseren finner dersom han leser igjennom manuskriptet en gang. Vi skal anta at X gitt $N = n$ er binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

- a) Hvilken betingelse må vi i tillegg anta dersom vår antagelse om at $X|N=n$ er binomisk fordelt, skal være korrekt?
 - ✓ Dersom $\lambda = 2$ og manuskriptet er på $s = 8$ sider, hva er da sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?
 - ✓ Dersom vi vet at manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og at $p = 0.6$, hva er da sannsynligheten for at korrekturleseren vil finne alle trykkfeilene?

La Y_k være antall trykkfeil som gjenstår etter at korrekturleseren har lest igjennom manuskriptet k uavhengige ganger ($k = 1, 2, \dots$), dvs. Y_1 er antall trykkfeil som gjenstår etter en gjennomlesning.

- b) Finn simultanfordelingen til Y_1 og N , og bruk den til å finne (marginal)fordelingen til Y_1 . Hva er fordelingen til Y_k ?