Statistikk

Hypotesetesting

H_0 : etablert hypotese.
H_1 : ny, annerledes hypotese.
Har vi evidens til å endre syn? Forlate det etablerte (H_0) og gå til det nye paradigmet (H_1)?

Hypotesetesting - tabell

Decision

Truth	H 0	H 1
H 0	Riktig	Type I feil
H 1	Type II feil	Riktig

Riktig og feil beslutning

1. Type I feil: H_0 forkastes, når H_0 er riktig.
2. Type II feil: H_0 aksepteres, når H_0 er gal.

$P(\text{Type I feil}) = P(\text{forkast} H_0 | H_0 \text{ er riktig}) = \alpha$.
α er signifikansnivå. Typisk $\alpha = 0.05, 0.01$ eller lignende. Avhengig av kostnad ved å skifte til H_1.

Ensidige og tosidige hypotesetester

Vi kan ha ensidige tester: $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ eller $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$
Vi kan ha tosidige test$erH_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Her vil testen H_0 ikke forkastes dersom μ_0 er innen konfidensintervallet for μ.

Tosidige hypotesetester og konfidensintervall

For en tosidige tester : Forkast om verdi under H_0 ikke er dekket av et konfidensintervall for parameteren.
Eksempel $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
Under H_0:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

:
Forkast om T er veldig stor eller veldig liten i forhold til t_{n-1} fordeling.

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha/2}, \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2}$$

Tosidige hypotesetester og konfidensintervall

Forkast om T er veldig stor eller veldig liten i forhold til t_{n-1} fordeling.

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha/2}, \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2}$$

Dette er ekvivalent med

$$\mu_0 < \bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} s/\sqrt{n}, \qquad \mu_0 > \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2} s/\sqrt{n}$$

Dvs at μ_0 er utenfor et $(1-\alpha)$ konfidensintervall for μ.

Eksempel hypotesetest - eksempel (H2022,3)

TMA4240 Statistikk, 3. desember 2022 – bokmål *Side 3 av 3*

Oppgave 3 Bilverkstedet

Et verksted klassifiserer feil i det elektriske anlegget til en bil til å være av 2 typer, A-feil og B-feil, avhengig av hvilken feilkode som blir gitt i feilsøkingen. Tidene målt i timer som går med til å finne en A-feil, X, og en B-feil, Y, er gitt ved sannsynsynlighetstetthetene $f_X(x) = \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}$, $x > 0$, $\beta > 0$ og $f_Y(y) = \frac{y}{\beta^2}e^{-y/\beta}$, $y > 0$, $\beta > 0$. Parameteren β er den samme i begge fordelingene.

Eksempel hypotesetest - eksempel (H2022,3)

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} X_i + \sum_{j=1}^{m_2} Y_j}{m_1 + 2m_2}$$

Finn forventning og varians til denne estimatoren.

d) En kunde har ventet i mange timer på at feilen skal bli funnet og mistenker at β er større enn 1 som er den verdien verkstedet hevder er riktig. Anta vi har $m_1 = m_2 = 100$ og at $\bar{x} = 1.43$ og $\bar{y} = 2.80$.

Forklar hvorfor $\hat{\beta}$ tilnærmet er normalfordelt.

Formuler en hypotesetest for denne situasjonen basert på mistanken til kunden. Foreslå en egnet testobservator (teststatistikk) og regn ut p-verdien til denne hypotesetesten med de gitte dataene. Kommenter resultatet.

Type II feil og styrke

$P(\text{Type II feil}) = P(\text{ikke forkast} H_0 | H_1 \text{er riktig}) = \beta$.
Det motsatte av Type II feil kalles styrke:
$1 - \beta = 1 - P(\text{Type II feil}) = P(\text{forkaster} H_0 | H_1 \text{er riktig})$.
For en normal-fordeling-situasjon med $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$:

$$P(\text{forkaster} H_0 | H_1 \text{er riktig}) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma^2/\sqrt{n}} > z_\alpha | \mu > \mu_0\right).$$

Eksempel teststyrke - eksempel (H2021,4)

TMA4240 Statistikk Høst 2021 Ettermiddag

4(d) **Innledning**: Man vurderer å ta den nye typen av komponenter i bruk i stedet for en gammel type som har vært lenge i bruk. For den gamle typen komponenter som har vært lenge i bruk vet man at verdien til θ er 2.6. Man ønsker derfor å undersøke om de observerte levetidene gitt i (b), som er for komponenter av den nye typen, gir grunnlag for å påstå at forventet levetid for den nye typen komponenter er større enn forventet levetid for den gamle typen komponenter.

For å besvare oppgaven kan du benytte tabellen på nest siste siden av oppgavesettet. Tabellen inneholder sannsynligheter i en χ^2-fordeling med 50 frihetsgrader.

Oppgave: Formuler situasjonen beskrevet over som et hypotesetestingsproblem. Formuler hypotesene H_0 og H_1, angi en testobservator og en tilhørende beslutningsregel, og bestem p-verdien så godt du kan ut fra tabellen på nest siste side i oppgavesettet.

Basert på denne p-verdien, vil du si at det er grunnlag for å påstå at forventet levetid for den nye typen komponenter er større enn forventet levetid for den gamle typen komponenter? Begrunn svaret.