Statistikk

Matematiske fag, NTNU

Hypotesetesting - tabell

		Decision: H 0	Decision: H 1
Truth	H 0	Riktig	Type I feil
Truth	H 1	Type II feil	Riktig

Hypotesetesting for ett-utvalg

Data: $X_1, \ldots, X_{n_1}$

- Normalfordelt, kjent varians : Normaltest: $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- Normalfordelt, ukjent varians : T-test: $T = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
- Binomisk fordeling: Eksakt test, Normalapproksimasjon, med eller uten halvkorreksjon. $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$
- Normalfordelt og test på varians σ: $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Hypotesetesting for to-utvalg

Tre hovedtilfeller

1. Normalfordeling $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. H_0: $\mu_1 = \mu_2$, kjente varianser.
2. Normalfordeling $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. H_0: $\mu_1 = \mu_2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, ukjent varians.
3. Binomisk fordeling med indikatorvariable $X_i \sim Bin(p_1, 1)$. $Y_j \sim Bin(p_2, 1)$. H_0: $p_1 = p_2$.

1 gir Normaltest. 2 gir t-test, 3 gir approksimativ normaltest.

Hypotesetesting - tabell

		Decision: H 0	Decision: H 1
Truth	H 0	Riktig	Type I feil
Truth	H 1	Type II feil	Riktig

Type II feil og styrke

$P(\text{Type II feil}) = P(\text{ikke forkast} H_0 | H_1 \text{er riktig}) = \beta$.
Det motsatte av Type II feil kalles styrke:
$1 - \beta = 1 - P(\text{Type II feil}) = P(\text{forkaster} H_0 | H_1 \text{er riktig})$.
For en normal-fordeling-situasjon med $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$:

$$P(\text{forkaster} H_0 | H_1 \text{er riktig}) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha | \mu > \mu_0\right).$$

Styrkeberegning

$$P(\text{forkaster} H_0 | H_1 \text{er riktig}) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha | \mu > \mu_0\right).$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu > \mu_0\right).$$

Styrken vil avhenge av hvor langt inn i den alternative hypotesen sannheten $\mu > \mu_0$ er.
Styrken vil avhenge av hvor mye data vi har - hvor stor n er.

Klassifisering av medisinske abstrakt: Styrke til H_0: $\mu = 63$, H_1: $\mu > 63$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

# Ohsumed er en database for medisinsk literatur.
# Her vil man fra sammendraf klassifisere hvilken sykdom der skrives om i artikkel
# Fra tidligere er forventet nøkaktighet 63. Man tror ny metode er bedre.
# Teststyrke for ulike alternativ i H1, H0=mu=mu0=63.

sigma=5 # varians i klassifiserings data
mu0=63 # referanseverdi i klassifikasjonsnøyaktighet
# Ser på styrke som funksjon av alternativ nøykatighet og antall data
x = np.linspace(mu0,mu0+4,100)
sigma=5
ndata=25
styrke25=1-norm.cdf(norm.ppf(0.95)-(x-mu0)/sigma*np.sqrt(ndata))
plt.plot(x, styrke25, color="red")
plt.xlabel("mu")
plt.ylabel("teststyrke")
ndata=200
styrke200=1-norm.cdf(norm.ppf(0.95)-(x-mu0)/sigma*np.sqrt(ndata))
plt.plot(x, styrke200, color="blue")
plt.show()
```

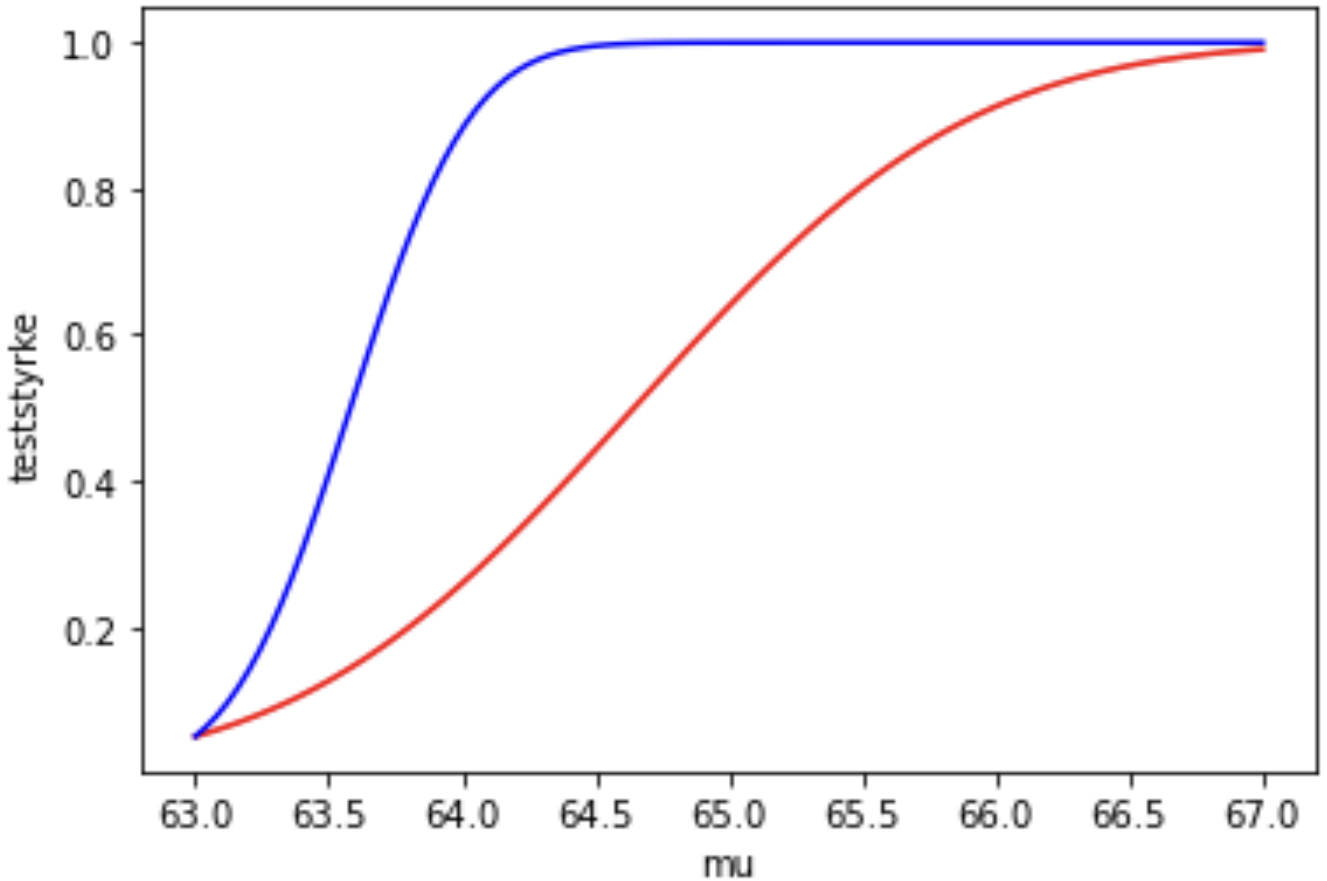
Styrkeberegning

$$P(\text{forkaster} H_0 | H_1 \text{er riktig}) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha | \mu > \mu_0\right).$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu > \mu_0\right).$$

Styrken vil avhenge av hvor langt inn i den alternative hypotesen sannheten $\mu > \mu_0$ er.
Styrken vil avhenge av hvor mye data vi har - hvor stor n er.

Klassifisering av medisinske abstrakt:
Styrke til H_0: $\mu = 63$, H_1: $\mu > 63$



Finn n for stor teststyrke

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu > \mu_0\right).$$

Finn n:

$z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\beta$.

$$n = \left[\frac{\sigma(z_\alpha - z_\beta)}{\mu-\mu_0}\right]^2$$

Kji-kvadrat og styrke (eksamen 2021,4)

$H_0 : \theta = 2.6,\ H_1 : \theta > 2.6$

$$\frac{n\hat{\theta}}{\theta} \sim \chi^2_{2n}$$

$$P(\text{forkaster} H_0 | H_1 \text{er riktig}) = P\left(\frac{n\hat{\theta}}{2.6} > \chi^2_{2n,\alpha} | \theta > 2.6\right).$$

$$= P\left(\frac{n\hat{\theta}}{\theta} > \chi^2_{2n,\alpha}\frac{2.6}{\theta} | \theta > 2.6\right).$$

Styrken vil avhenge av hvor langt inn i den alternative hypotesen sannheten $\theta > 2.6$ er.
Styrken vil avhenge av hvor mye data vi har - hvor stor n er.

Kji-kvadrat og styrke (eksamen 2021,4)

For en gitt θ i H_1, finn n stor nok til at:

$$\chi^2_{2n,\beta} = \chi^2_{2n,\alpha} \frac{2.6}{\theta}$$

Prøving og feiling utfra tabell.

Andre tester : i dag

- ikke-parametrisk test (fortegnstest)
- beregningsbasert test (permutasjonstest)