Statistikk: week 2, 2

Jo Eidsvik

Matematiske fag, NTNU

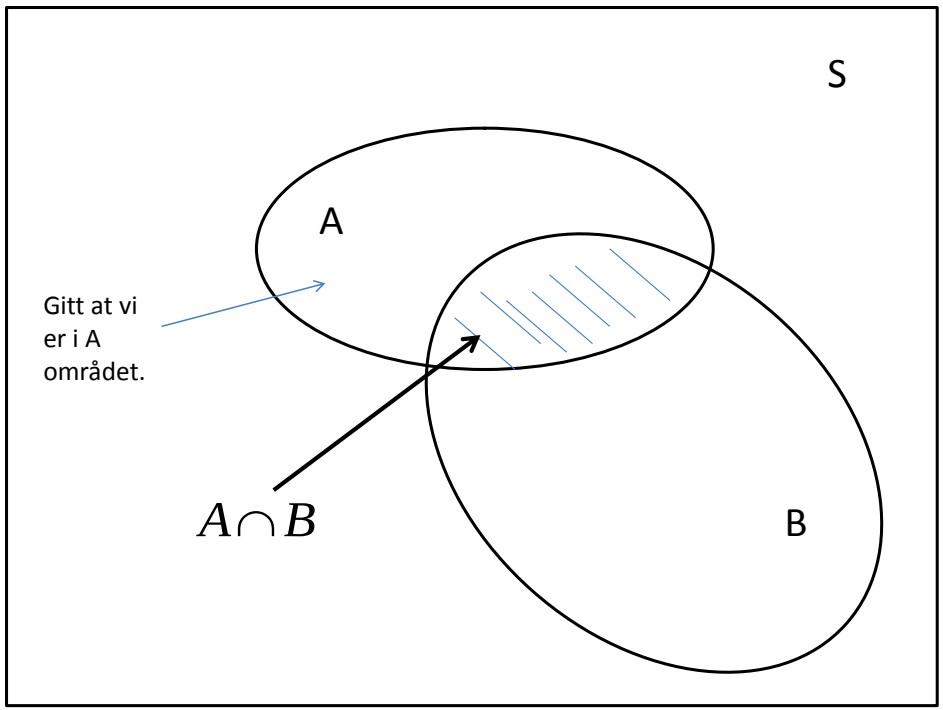
Betinget sannsynlighet

- Utfallsrom S = alle mulige enkelthendelser
- Begivenheter A, B delmengder av utfallsrommet.
- $P(B|A)$ = Sannsynligheten for begivenhet B, gitt at A har skjedd.

Definisjon

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Venn diagram



Betinget - betyr det noe

			Hjemme				Borte			
Plass	Lag	Kamper	V	U	T	Mål	V	U	T	Mål
1	Bodø/Glimt	19	7	1	2	27 - 9	6	2	1	22 - 8
2	Viking	19	6	2	1	24 - 12	7	1	2	23 - 14
3	Brann	18	6	2	1	18 - 12	5	1	3	15 - 14
4	Tromsø	19	5	1	3	12 - 9	5	2	3	18 - 18
5	Rosenborg	18	5	4	0	14 - 4	3	2	4	10 - 17
6	Sandefjord Fotball	18	8	0	1	26 - 7	1	1	7	9 - 19
7	KFUM	19	4	3	3	19 - 12	3	3	3	12 - 10
8	Molde	19	5	1	4	15 - 11	3	2	4	12 - 12
9	Vålerenga	19	4	2	3	18 - 13	4	1	5	13 - 17
10	Fredrikstad	18	6	1	3	17 - 10	1	4	3	6 - 10
11	Sarpsborg 08	18	2	3	3	14 - 13	3	4	3	14 - 15
12	HamKam	19	3	3	3	11 - 15	2	3	5	10 - 16
13	Bryne	19	4	3	3	15 - 16	1	2	6	8 - 16
14	Kristiansund	18	2	3	4	9 - 14	3	2	4	11 - 19
15	Strømsgodset	19	1	0	8	7 - 21	2	1	7	16 - 23
16	Haugesund	19	1	2	7	6 - 25	0	0	9	4 - 24

P(vinn|H)	P(vinn|B)	P(vinn)
0.7000	0.6667	0.6842
0.6667	0.7000	0.6842
0.6667	0.5556	0.6111
0.5556	0.5000	0.5263
0.5556	0.3333	0.4444
0.8889	0.1111	0.5000
0.4000	0.3333	0.3684
0.5000	0.3333	0.4211
0.4444	0.4000	0.4211
0.6000	0.1250	0.3889
0.2500	0.3000	0.2778
0.3333	0.2000	0.2632
0.4000	0.1111	0.2632
0.2222	0.3333	0.2778
0.1111	0.2000	0.1579
0.1000	0	0.0526

Definisjon

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

Sannsynligheten for A og B sammen kan splittes i produktet av:

1. sannsynligheten for den ene
2. betinget sannsylighet for den andre, gitt den første.

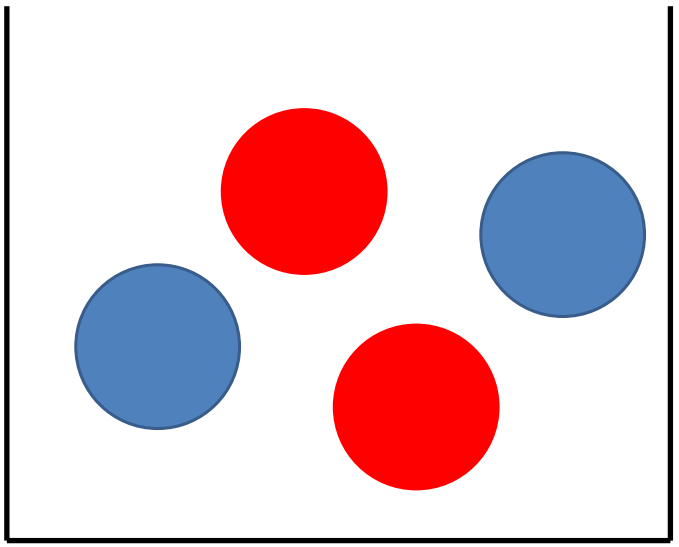
Definisjon: Uavhengighet

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(B)P(A)$$

At A har skjedd betyr ingenting for sannsynligheten til B. Sannsynligheten for at de to skjer sammen er lik produktet av enkeltsannsynlighetene.

Eksempel: Trekning med/uten tilbakelegging



En urne har 2 røde og 2 blå baller.

Eksempel: Trekning med tilbakelegging

$A =$ første kule er rød. $B =$ andre kule er blå.
Strategi med tilbakelegging

- Trekker en tilfeldig kule og legger den tilbake. $P(A) = 1/2$.
- Trekker andre kule. $P(B|A) = 1/2$.

Sannsynligheten for rød og blå er konstante over flere trekninger.
Uavhengig av historie.

Eksempel: Trekning uten tilbakelegging

$A =$ første kule er rød. $B =$ andre kule er blå.
Strategi uten tilbakelegging

- Trekker en tilfeldig kule og legger den vekk. $P(A) = 1/2$.
- Trekker andre kule. $P(B|A) = 2/3$.

Sannsynligheten for rød og blå varierer over flere trekninger. **Avhengig av historie.**

Eksempel: Trekning med/ uten tilbakelegging

- Lotteri med vinnerlodd og taperlodd. Hvis få premier har gått, er det større vinnersjanse.
- Valgundersøkelser. Ringer til 1000, 4 mill i Norge. Med / uten tilbakelegging ca likt.

Bayes' regel

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

Invers sannsynlighet. Vi vet $P(B)$, $P(A|B)$ og $P(A|B^c)$. Vi finner $P(B|A)$.

Bayes' regel - generell form

$$P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Der $B_1, \ldots, B_n$ er disjunkte hendelser og $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$.

Bayes regel i bruk: Monty Hall - Døren til lykke

- B_i = premie bak dør $i = 1, 2, 3$. $P(B_i) = 1/3$.
- Deltaker tipper dør 1.
- A = TV vert åpner dør 2.
- Skal deltaker stå ved valg av dør 1 eller skifte til dør 3?

1. $P(A|B_1) = 0.5$. Fritt til 2 eller 3.
2. $P(A|B_2) = 0$. Kan ikke ta 2, må ta 3.
3. $P(A|B_3) = 1$. Må ta 3, kan ikke ta 2.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)} = 1/3$$