

Bruke momentgenererende funksjoner til å bevise egenskaper til fordelinger

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Husk: Momentgenererende funksjoner og egenskaper for disse

Definisjon (Momentgenererende funksjon)

Momentgenererende funksjon til en stokastisk variabel X er

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

Teorem

La X være en stokastisk variabel og la a være en konstant. Da har vi at

- ★ $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t),$
- ★ $M_{aX}(t) = M_X(at).$

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige stokastiske variabler. Da har vi at

- ★ $M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t).$

Teorem

La X og Y være to stokastiske variabler med momentgenererende funksjoner henholdsvis $M_X(t)$ og $M_Y(t)$. Dersom

$$M_X(t) = M_Y(t)$$

for alle t er også fordelingene til X og Y identiske.

- ★ I denne videoen: Bruke momentgenererende funksjoner til å (be)viser
 - egenskaper til fordelinger
 - sammenhenger mellom fordelinger
- ★ Hvorfor?
 - for å lære disse egenskapene
 - for å lære hvordan slike egenskaper kan bevises

Bevis ved hjelp av momentgenererende funksjoner

$$X \sim N(\mu, \sigma^2): M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2}$$

$$M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t), \quad M_{aX}(t) = M_X(at)$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ uavhengige:

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$$

Teorem

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige og $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$. La $a_1, a_2, \dots, a_n$ og b være konstanter, og

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + b.$$

Da er

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Bevis

La

$$Z \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right), \quad \text{dvs. } M_Z(t) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b\right)t + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)t^2\right\}$$

$$M_{X_i}(t) = \exp\left\{\mu_i t + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t^2\right\}, \quad M_{a_i X_i}(t) = M_{X_i}(a_i t) = \exp\left\{\mu_i a_i t + \frac{1}{2} \sigma_i^2 a_i^2 t^2\right\}$$

$$M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{a_i X_i}(t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \left(a_i \mu_i t + a_i^2 \sigma_i^2 t^2\right)\right\}$$

$$M_Y(t) = M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i + b}(t) = e^{bt} M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i}(t) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b\right)t + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)t^2\right\}$$

Så $M_Y(t) = M_Z(t)$ og dermed har Y samme fordeling som Z , og teoremet er bevist.

Bevis ved hjelp av momentgenererende funksjoner

Fra matematikk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Teorem

La $X \sim \text{bin}(n, p)$. I grensen når $n \rightarrow \infty$ og $p \rightarrow 0$ på en slik måte at $\lambda = np$ holdes konstant har vi da at $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Bevis

- ★ Anta at $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Momentgenererende funksjoner til Z er da

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = \sum_{z=0}^{\infty} e^{tz} \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda} = \dots = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

- ★ Momentgenererende funksjon for $X \sim \text{bin}(n, p)$: $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$
- ★ Setter $\lambda = np \Leftrightarrow p = \lambda/n$, som gir

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{n}e^t + 1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right)^n$$

- ★ Lar så $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right)^n = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

- ★ Så $\lim_{n \rightarrow \infty} M_X(t) = M_Z(t)$
- ★ Har dermed vist at i grensen når $n \rightarrow \infty$ og $p \rightarrow 0$ slik at $np = \lambda$ vil fordelingen til X konvergere mot fordelingen til Z , og teoremet er bevist

Andre teoremer som kan bevises ved momentgenererende funksjoner

Teorem

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige og $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$. La $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Da er Y poissonfordelt med parameter $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Teorem

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige og $X_i \sim \chi_{\nu_i}^2$. La $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Da er Y kjikvadratfordelt med $\sum_{i=1}^n \nu_i$ frihetsgrader.

Teorem

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige og eksponensialfordelt med samme parameter λ . La $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Da er Y gammafordelt med parametre $\alpha = n$ og $\beta = \frac{1}{\lambda}$.

Teorem

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige og binomisk fordelt og $X_i \sim \text{bin}(n_i, p)$. La $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Da er Y binomisk fordelt med $n = \sum_{i=1}^n n_i$ forsøk og sannsynlighet for suksess lik p .

Teorem

La $X \sim \text{bin}(n, p)$ og la

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

I grensen når $n \rightarrow \infty$ er da $Z \sim N(0, 1)$.

Oppsummering

- ★ Har sett hvordan momentgenererende funksjoner kan brukes til å bevise teoremer
 - om egenskaper til fordelinger
 - sammenhenger mellom fordelinger
- ★ Har dermed lært en del nye
 - egenskaper til fordelinger
 - sammenhenger mellom fordelinger