

Eksponensialfordeling

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Husk: Poissonprosess og poissonfordeling

- ★ Husk: Definisjonen av en poissonprosess

Definisjon (Poissonprosess)

En prosess $\{N(t); t \geq 0\}$ kalles in poissonprosess med intensitet λ hvis følgende krav er oppfylt

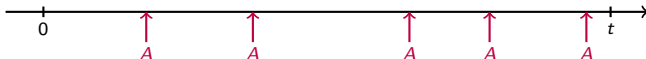
1. $N(0) = 0$.
2. For $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ er $N(t_2) - N(t_1)$ og $N(t_4) - N(t_3)$ uavhengige.
3. For $t \geq 0$ og $\Delta t > 0$ har vi at

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t),$$

der hver $o(\Delta t)$ angir en funksjon som oppfyller

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$



- ★ Husk: Poissonfordeling

$$f(x) = P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, x = 0, 1, 2, \dots$$

- ★ Fokus nå: Tidspunkt for første hendelse

Eksponentialfordeling

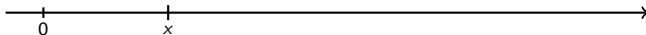
$$\text{Poissonfordeling: } f(x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

Definisjon

La $N(t)$, $t \geq 0$ være en poissonprosess med intensitet λ , og la X være tidspunktet for den første hendelsen i denne prosessen, dvs

$$X = \min\{t : N(t) = 1\}.$$

Vi sier da at X er eksponentialfordelt med parameter λ .



- ★ Hvilken sannsynlighetstetthet har X ?
- ★ Vi regner først ut $F(x)$. For $x \geq 0$ får vi

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= 1 - P(X > x) \\ &= 1 - P(N(x) = 0) \\ &= 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

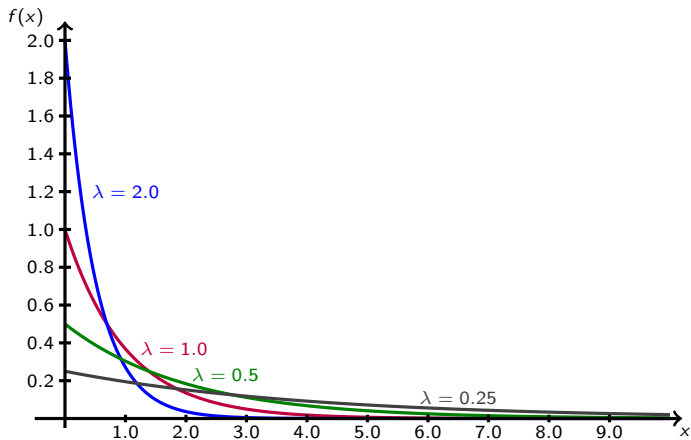
- ★ Finner $f(x)$ ved å derivere

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ &= -e^{-\lambda x} \cdot (-\lambda) \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Eksponentialfordeling

★ Sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



Forventningsverdi og varians i eksponensialfordeling

Eksponensialfordeling: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

Delvis integrasjon: $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

Varians: $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$

Teorem

La X være eksponensialfordelt med parameter λ . Da er

$$E[X] = \frac{1}{\lambda},$$
$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bevis (for forventningsverdien)

Starter med definisjonen av forventningsverdi

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[x \cdot (-e^{-\lambda x}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot (-e^{-\lambda x}) dx \\ &= 0 - 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Delvis integrasjon

$u = x, \quad dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$

$du = dx, \quad v = -e^{-\lambda x}$

Kumulativ fordeling og kvantiler

- ★ Sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- ★ Kumulativ fordelingsfunksjon

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- ★ Merk:

- finnes ikke tabeller med sannsynligheter i eksponensialfordelingen
- kan kalle en funksjon som gir sannsynligheten $P(X \leq x)$

- ★ Kvantiler kan finnes analytisk

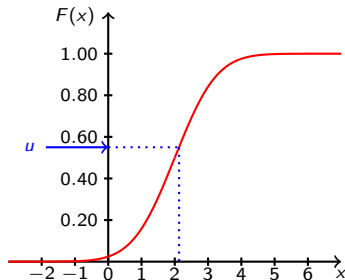
- må løse $P(X > x_\alpha) = \alpha$ med hensyn på x_α
- finnes ikke tabeller over kvantiler i eksponensialfordelingen

Simulering fra eksponensialfordeling

- ★ Har tidligere diskutert generell algoritme for å simulere fra en kontinuerlig fordeling

$$U \sim \text{Unif}[0, 1]$$

$$X = F^{-1}(U)$$



- ★ Vanlig å bruke for eksponensialfordelingen

$$x = F^{-1}(u) \Leftrightarrow F(x) = u$$

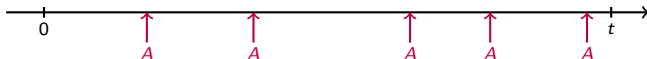
$$1 - e^{-\lambda x} = u$$

$$1 - u = e^{-\lambda x}$$

$$\ln(1 - u) = -\lambda x$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

- ★ Husk: Brukes for å simulere fra en poissonfordeling



Oppsummering

- ★ Har definert
 - eksponensialfordeling
- ★ Har funnet
 - kumulativ fordelingsfunksjon
 - sannsynlighetstetthet
 - forventningsverdi, $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
 - varians, $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$
- ★ Har diskutert hvordan man kan
 - finne kvantiler
 - simulere verdi fra denne fordelingen