Feilforplantningsformelen

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Funksjon av flere stokastiske variabler

- Situasjon:
  - har flere uavhengige stokastiske variabler: X, Y, Z
  - er interessert en en funksjon av disse

$$V = g(X, Y, Z)$$

  - hva er da fordelingen til V?
  - eventuelt, hva er forventningsverdi og varians til V?

- Må anta at vi kjenner fordelingene til X, Y og Z

- I enkelte situasjoner kan vi finne fordelingen til V analytisk
  - f.eks: X, Y, Z uavhengige og normalfordelte, V lineær funksjon av X, Y, Z

- Ofte er det vanskelig (eller umulig) å finne fordelingen til V analytisk

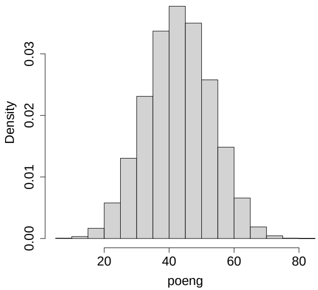
- Hvilke alternativer har vi da?
  - approksimere fordelingen til V ved stokastisk (Monte Carlo) simulering
  - approksimere $E[V]$ og $\text{Var}[V]$ ved feilforplantningsformelen

Approksimere en fordeling ved stokastisk simulering

- Situasjon:
  - har flere uavhengige stokastiske variabler: X, Y, Z
  - er interessert en en funksjon av disse
    $$V = g(X, Y, Z)$$
  - ønsker å approksimere fordelingen til V
- Anta $X \sim f_X(x)$, $Y \sim f_Y(y)$, $Z \sim f_Z(z)$
- Anta at vi kan simulere verdier fra $f_X(x)$, $f_Y(y)$ og $f_Z(z)$
- Kan kan simulere en verdi fra $f_V(v)$ ved
  a) Simuler verdi x fra $f_X(x)$
  b) Simuler verdi y fra $f_Y(y)$
  c) Simuler verdi z fra $f_Z(z)$
  d) Beregn $v = g(x, y, z)$
- Simuler n verdier $v_1, v_2, \dots, v_n$ fra $f_V(v)$
- Lag et sannsynlighetshistogram for $v_1, v_2, \dots, v_n$
- Husk: kan også approksimere $E[V]$ og $\text{Var}[V]$ ved

$$E[V] \approx \overline{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i$$

$$\text{Var}[V] \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v})^2$$



Feilforplantningsformelen

- Situasjon:
  - har flere uavhengige stokastiske variabler: X, Y, Z
  - er interessert en en funksjon av disse

$$V = g(X, Y, Z)$$

  - ønsker å approksimere $E[V]$ og $\text{Var}[V]$
- Bruker Taylors formel for rekkeutvikling av $g(x, y, z)$
  - rekkeutvikler x om $\mu_X = E[X]$, y om $\mu_Y = E[Y]$, og z om $\mu_Z = E[Z]$
  - approksimerer ved kun å ta med opp til første ordens ledd

$$\begin{aligned} g(x, y, z) \approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) &+ \frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (x - \mu_X) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (y - \mu_Y) + \frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (z - \mu_Z) \end{aligned}$$

- Får dermed at

$$E[V] = E[g(X, Y, Z)] \approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[V] = \text{Var}[g(X, Y, Z)] \approx \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)\right)^2 \text{Var}[X] &+ \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)\right)^2 \text{Var}[Y] \\ &+ \left(\frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)\right)^2 \text{Var}[Z] \end{aligned}$$

- Den siste av disse formlene kalles (Gauss) feilforplantningsformel

Eksempel

$$E[V] = E[g(X,Y,Z)] \approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[V] = \mathrm{Var}[g(X,Y,Z)] \approx & \left(\tfrac{\partial g}{\partial x}(\mu_X,\mu_Y,\mu_Z)\right)^2 \mathrm{Var}[X] \\ & + \left(\tfrac{\partial g}{\partial y}(\mu_X,\mu_Y,\mu_Z)\right)^2 \mathrm{Var}[Y] \\ & + \left(\tfrac{\partial g}{\partial z}(\mu_X,\mu_Y,\mu_Z)\right)^2 \mathrm{Var}[Z]\end{aligned}$$

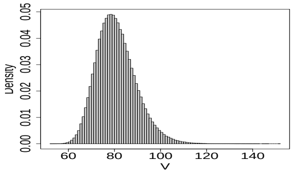
- Anta: Vi er interessert i

$$V = \frac{S}{T},$$

hvor $S \sim N(\mu_S, \sigma_S^2)$ og $T \sim N(\mu_T, \sigma_T^2)$ er uavhengige stokastiske variabler

Stokastisk simulering

- Trenger tallverdier for μ_S, σ_S^2, μ_T og σ_T^2
- La $\mu_S = 40$, $\sigma_S^2 = 1^2$, $\mu_T = 0.5$, $\sigma_T^2 = 0.05^2$
- Sannsynlighetshistogram for V



- Approksimert $E[V]$ og $\mathrm{Var}[V]$

$$E[V] \approx 80.83$$

$$\mathrm{Var}[V] \approx 8.59^2$$

Feilforplantningsformelen

- Partiellderiverte

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{s}{t^2}$$

- Innsatt gir dette

$$E[V] \approx \frac{\mu_S}{\mu_T}$$

$$\mathrm{Var}[V] \approx \left(\frac{1}{\mu_T}\right)^2 \sigma_S^2 + \left(-\frac{\mu_S}{\mu_T^2}\right)^2 \sigma_T^2$$

- La $\mu_S = 40$, $\sigma_S^2 = 1^2$, $\mu_T = 0.5$, $\sigma_T^2 = 0.05^2$

$$E[V] \approx \frac{40}{0.5} = 80$$

$$\mathrm{Var}[V] \approx \left(\frac{1}{0.5}\right)^2 \cdot 1 + \left(-\frac{40}{0.5^2}\right) \cdot 0.05^2 = 8.25^2$$

Oppsummering

- Har sett på situasjonen
  - har flere uavhengige stokastiske variabler med kjent fordeling: X, Y, Z
  - er interessert i en funksjon av disse: $V = g(X, Y, Z)$
  - hvilken fordeling har V? Eventuelt, hva er $E[V]$ og $\text{Var}[V]$?

- I enkelte tilfeller kan vi finne fordelingen til V
- Hvis vi ikke kan finne fordelingen for V analytisk, kan vi
  - bruke stokastisk (Monte Carlo) simulering
  - bruke feilforplantningsformelen
- For stokastisk (Monte Carlo) simulering
  - trenger verdier for eventuelle parametre
  - kan approksimere fordelingen
  - kan gjøre approksimasjonen vilkårlig god
- For feilforplantningsformelen
  - får svar som funksjon av eventuelle parametre
  - approksimerer kun forventningsverdi og varians (standardavvik)