

Fortegnstesten

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Motivasjon

★ Anta

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ tilfeldig utvalg fra en $f(x)$ -populasjon
- tilhørende observerte verdier er $x_1, x_2, \dots, x_n$

★ Ønsker å teste

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

★ Hvis vi antar $X_1, X_2, \dots, X_n$ tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$ -populasjonen

- har $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- testobservator (hvis verdien til σ^2 kjent)

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1) \quad \text{når } H_0 \text{ sann}$$

★ Hvis n stor: Sentralgrenseteoremet gir

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \approx N(0, 1) \quad \text{når } H_0 \text{ sann}$$

★ Hva hvis

- ikke rimelig å anta at X_i -ene er normalfordelt,
 - og n ikke stor (nok)?
- Parametrisk vs ikke-parametrisk test

Fortegnstesten

★ Anta

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ tilfeldig utvalg fra en $f(x)$ -populasjon
- la $\tilde{\mu}$ være medianen i fordelingen $f(x)$, dvs $F(\tilde{\mu}) = 0.5$
- tilhørende observerte verdier er $x_1, x_2, \dots, x_n$

★ Ønsker å teste

$$H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 \quad \text{mot} \quad H_1 : \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$$

– Lager testobservator ved:

- finn fortegnet til $X_i - \tilde{\mu}_0$, dvs vi får et + eller et –
- la U være antall +'er

$$U = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i - \tilde{\mu}_0 > 0)$$

- når H_0 er sann har vi at: $U \sim \text{binomisk}(n, 0.5)$

★ Forkaster H_0 dersom $U \geq k$

★ Regner ut p -verdien

$$u_{\text{obs}} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i - \tilde{\mu}_0 > 0)$$

$$p = P(U \geq u_{\text{obs}} | H_0 \text{ sann}) = \sum_{u=u_{\text{obs}}}^n \binom{n}{u} \cdot 0.5^u \cdot 0.5^{n-u}$$

★ Husk: hvis $n \geq 10$ kan vi bruke tilnærming til normalfordeling

Oppsummering

- ★ Har sett på et eksempel på en ikke-parametrisk test
 - fortegnstesten
 - merk: kan utføre testen uten å vite type fordeling for X_i 'ene

- ★ Hvorfor bruker vi ikke alltid fortegnstesten?
 - en normalfordelingstest gir høyere teststyrke enn en fortegnstest!
 - dvs. sannsynligheten for en type II-feil blir høyere med en fortegnstest