

Forventningsverdi av funksjoner av stokastiske variabler

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Funksjoner av stokastiske variabler

- ★ La $X \sim f_X(x)$
- ★ La $Z = g(X)$, der $g(\cdot)$ er en matematisk funksjon
- ★ Hvordan da finne $E[Z] = E[g(X)] = \mu_{g(X)}$?

Diskret: $\mu = E[X] = \sum_x x f_X(x)$

Kontinuerlig: $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

$\text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2]$

Teorem

La $X \sim f_X(x)$, og la $Z = g(X)$ for en funksjon $g(x)$. Hvis X er en diskret stokastisk variabel har vi da at

$$E[Z] = E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x),$$

og hvis X er en kontinuerlig stokastisk variabel har vi

$$E[Z] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Bevis (når X er diskret stokastisk variabel)

Punktsannsynligheten for Z blir

$$f_Z(z) = P(Z = z) = \sum_{x: g(x)=z} f_X(x)$$

Dermed

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_z z f_Z(z) = \sum_z \left[z \sum_{x: g(x)=z} f_X(x) \right] = \sum_z \left[\sum_{x: g(x)=z} z f_X(x) \right] \\ &= \sum_z \left[\sum_{x: g(x)=z} g(x) f_X(x) \right] = \sum_x g(x) f_X(x) \end{aligned}$$

Variansen til en funksjon av stokastiske variabler

$$\text{Diskret: } \mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x)$$

$$\text{Kontinuerlig: } \mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2]$$

★ La $Z = g(X)$. Hvordan finne $\text{Var}[Z] = \text{Var}[g(X)]$?

★ Definisjonen av varians gir at

$$\text{Var}[Z] = E[(Z - \mu_Z)^2]$$

$$\text{Var}[g(X)] = E[(g(X) - \mu_{g(X)})^2] = E[h(X)]$$

- her er $\mu_{g(X)}$ et tall
- definer funksjonen $h(X) = (g(X) - \mu_{g(X)})^2$

★ Dermed har vi

$$\text{Diskret: } \text{Var}[g(X)] = \sum_x h(x) f_X(x) = \sum_x (g(x) - \mu_{g(X)})^2 f_X(x)$$

$$\text{Kontinuerlig: } \text{Var}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{g(X)})^2 f_X(x) dx$$

Funksjoner av flere stokastiske variabler

Diskret: $\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x)f_X(x)$

Kontinuerlig: $\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$

- ★ Resultatene diskutert foran generaliserer til funksjoner av flere stokastiske variabler
- ★ La $(X, Y) \sim f_{XY}(x, y)$, $Z = g(X, Y)$ der $g(\cdot, \cdot)$ er en matematisk funksjon.
- ★ Hvis X og Y er diskrete stokastiske variabler har vi at

$$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y)f_{X,Y}(x, y)$$

- ★ Hvis X og Y er kontinuerlige stokastiske variabler har vi at

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{X,Y}(x, y)dx dy$$

- ★ Hvis X og Y er diskrete stokastiske variabler har vi at

$$\text{Var}[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y (g(X, Y) - \mu_{g(X,Y)})^2 f_{XY}(x, y)$$

- ★ Hvis X og Y er kontinuerlige stokastiske variabler har vi at

$$\text{Var}[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (g(X, Y) - \mu_{g(X,Y)})^2 f_{XY}(x, y)dx dy$$

Approximasjon ved stokastisk simulering

$$\mu_X = E[X] \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
$$\sigma_X^2 = \text{Var}[X] \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- ★ Merk at vi kan approksimere $E[g(X)]$ og $\text{Var}[g(X)]$ ved stokastisk simulering
- ★ Generer uavhengige realisasjoner $x_1, x_2, \dots, x_n$ fra $f_X(x)$
- ★ Da er

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) = \overline{g(x)}$$

$$\sigma_{g(X)}^2 = \text{Var}[g(X)] \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - \overline{g(x)})^2$$

Oppsummering

- ★ Har funnet hvordan vi kan regne ut
 - $E[g(X)]$
 - $\text{Var}[g(X)]$
- ★ Generalisering til funksjoner av flere stokastiske variabler, $g(X, Y)$
- ★ Har diskutert hvordan stokastisk simulering kan brukes til å approksimere
 - $E[g(X)]$
 - $\text{Var}[g(X)]$
- ★ NB: Skal senere finne enklere regneregler forventingsverdi og varians for linære funksjoner