Forventningsverdi og varians til lineære funksjoner

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$

$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx$

- La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- Skal utlede formler for

$$\begin{aligned} E[aX] &= aE[X] \\ E[b] &= \\ E[X+Y] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[aX] &= \int_{-\infty}^{\infty} axf_X(x)dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \\ &= aE[X] \end{aligned}$$

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y) dx$$

- ⋆ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ⋆ Skal utlede formler for

$$\begin{aligned} E[aX] &= aE[X] \\ E[b] &= b \\ E[X+Y] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[b] &= \int_{-\infty}^{\infty} b f_X(x) dx \\ &= b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= b \end{aligned}$$

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$

$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx$

- La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- Skal utlede formler for

$$
\begin{aligned}
E[aX] &= aE[X] \\
E[b] &= b \\
E[X+Y] &= E[X] + E[Y]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X+Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f_{XY}(x,y) dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x f_{XY}(x,y) + y f_{XY}(x,y)) dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} x f_{XY}(x,y) dx\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x,y) dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} x f_{XY}(x,y) dy\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x,y) dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left[y \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dx \right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
&= E[X] + E[Y]
\end{aligned}
$$

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$

$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y) dx$

- La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- Skal utlede formler for

$$\begin{aligned} E[aX] &= aE[X] \\ E[b] &= b \\ E[X+Y] &= E[X]+E[Y] \end{aligned}$$

- Merk: Den siste regneregelen kan generaliseres til en sum av flere enn to SV

$$E[X+Y+Z] = E[X+(Y+Z)] = E[X] + E[Y+Z] = E[X] + E[Y] + E[Z]$$

$$E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx$$

- La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- Skal utlede formler for

$$\begin{aligned} E[aX] &= aE[X] \\ E[b] &= b \\ E[X+Y] &= E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

- Et eksempel på bruk av regnereglene

$$\begin{aligned} E[4X - 6Y + 2] &= E[4X + (-6)Y + 2] \\ &= E[4X] + E[(-6)Y] + E[2] \\ &= 4E[X] + (-6)E[Y] + 2 \\ &= 4E[X] - 6E[Y] + 2 \end{aligned}$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$
$$E[b] = b$$
$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$
$$\text{Var}[X] = E[(X-\mu_X)^2]$$

- La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- Skal utlede formler for

$$\begin{aligned}
\text{Var}[aX] &= a^2\text{Var}[X] \\
\text{Var}[b] &= \\
\text{Var}[X+Y] &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[aX] &= E[(aX-\mu_{aX})^2] \\
&= E[(aX-a\mu_X)^2] \\
&= E[a^2(X-\mu_X)^2] \\
&= a^2E[(X-\mu_X)^2] \\
&= a^2\text{Var}[X]
\end{aligned}$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$
$$E[b] = b$$
$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$
$$\text{Var}[X] = E[(X-\mu_X)^2]$$

- La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- Skal utlede formler for

$$\begin{aligned}
\text{Var}[aX] &= a^2\text{Var}[X] \\
\text{Var}[b] &= 0 \\
\text{Var}[X+Y] &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[b] &= E[(b-\mu_b)^2] \\
&= E[(b-b)^2] \\
&= E[0] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$
$$E[b] = b$$
$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$
$$\text{Var}[X] = E[(X-\mu_X)^2]$$

- ⋆ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ⋆ Skal utlede formler for

$$\begin{aligned}
\text{Var}[aX] &= a^2\text{Var}[X] \\
\text{Var}[b] &= 0 \\
\text{Var}[X+Y] &= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X,Y]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[X+Y] &= E[((X+Y) - \mu_{X+Y})^2] \\
&= E[((X+Y) - (\mu_X + \mu_Y))^2] \\
&= E[((X-\mu_X) + (Y-\mu_Y))^2] \\
&= E[(X-\mu_X)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) + (Y-\mu_Y)^2] \\
&= E[(X-\mu_X)^2] + E[2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] + E[(Y-\mu_Y)^2] \\
&= \text{Var}[X] + 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] + \text{Var}[Y] \\
&= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X,Y]
\end{aligned}$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$
$$E[b] = b$$
$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$
$$\mathrm{Var}[X] = E[(X-\mu_X)^2]$$

- La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- Skal utlede formler for

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[aX] &= a^2\mathrm{Var}[X] \\
\mathrm{Var}[b] &= 0 \\
\mathrm{Var}[X+Y] &= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}[X,Y]
\end{aligned}$$

- Merk: Den siste regneregelen kan generaliseres til en sum av flere enn to SV

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

- Merk: Dersom $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige SV får vi at

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i]$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$
$$E[b] = b$$
$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$
$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2]$$

- La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- Skal utlede formler for

$$\begin{aligned}
\text{Var}[aX] &= a^2\text{Var}[X] \\
\text{Var}[b] &= 0 \\
\text{Var}[X + Y] &= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]
\end{aligned}$$

- Et eksempel på bruk av regnereglene. Anta X og Y uavhengige

$$\begin{aligned}
\text{Var}[4X - 6Y + 2] &= \text{Var}[4X + (-6)Y + 2] \\
&= \text{Var}[4X] + \text{Var}[(-6)Y] + \text{Var}[2] \\
&= 4^2\text{Var}[X] + (-6)^2\text{Var}[Y] + 0 \\
&= 16\text{Var}[X] + 36\text{Var}[Y]
\end{aligned}$$

Oppsummering

⋆ Har funnet regneregler

$$
\begin{aligned}
E[aX] &= aE[X] \\
E[b] &= b \\
E[X+Y] &= E[X] + E[Y]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[aX] &= a^2\mathrm{Var}[X] \\
\mathrm{Var}[b] &= 0 \\
\mathrm{Var}[X+Y] &= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cox}[X, Y]
\end{aligned}
$$