

Forventningsverdi, varians og standardavvik

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Forventningsverdi

Tolkning av sannsynlighet:

- ★ La X være diskret stokastisk variabel med punktsannsynlighet

$$f(x) = P(X = x), x = 1, 2, \dots$$

$$\frac{S_n(A)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$$

- ★ Hvis vi genererer mange realisasjoner av X , hva blir gjennomsnittet?
- ★ Anta n realisasjoner, $X_1, X_2, \dots, X_n$, av X

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- ★ La $S_n(x)$ være antall av $X_1, X_2, \dots, X_n$ som er lik verdien x

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot S_n(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{S_n(x)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot f(x)$$

Definisjon (Forventningsverdi)

La X være en stokastisk variabel med sannsynlighetsfordeling $f(x)$. Hvis X er en diskret stokastisk variabel er forventningsverdien til X gitt som

$$\mu = \mu_X = E[X] = \sum_x x \cdot f(x)$$

der summer er over alle mulige verdier for x . Hvis X er en kontinuerlig stokastisk variabel er forventningsverdien til X gitt som

$$\mu = \mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

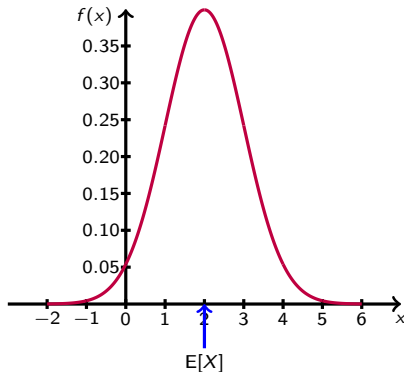
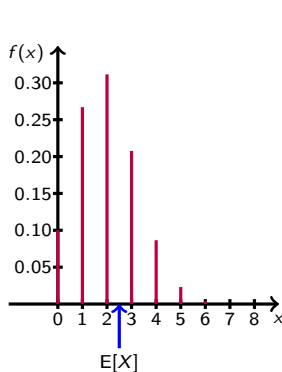
Tolkning av forventningsverdi

Diskret: $E[X] = \sum_x xf(x)$

Kontinuerlig: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

★ Tolkning 1: Gjennomsnitt av uendelig mange realisasjoner

★ Tolkning 2: Tyngdepunkt



★ Merk: Hvis det finnes et tall a slik at $f(a - x) = f(a + x)$ for alle x har vi at

$$E[X] = a$$

Varians

- ★ Forventningsverdien $E[X]$ angir gjennomsnittet av X når vi gjentar det stokastiske forsøket (uendelig) mange ganger
- ★ Trenger også en størrelse som sier noe om hvor mye verdien til X varierer når vi gjentar forsøket

Definisjon (Varians)

Variansen til en stokastisk variabel X med forventningsverdi $E[X] = \mu$ er

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \text{Var}[X] = E \left[(X - \mu)^2 \right].$$

- ★ Merk: Hvis X har dimensjon m vil $\text{Var}[X]$ ha dimensjon m^2
- ★ Trenger også en størrelse med samme dimensjon som X

Definisjon (Standardavvik)

Standardavviket til en stokastisk variabel X med forventningverdi $E[X] = \mu$ er

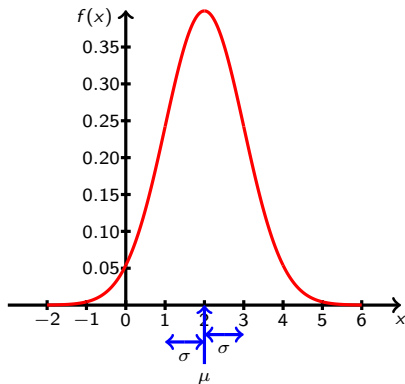
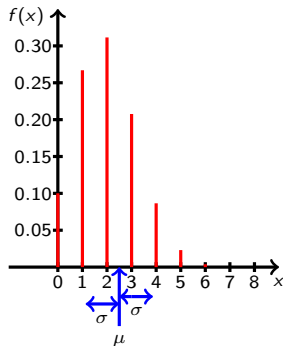
$$\sigma = \sigma_X = SD[X] = \sqrt{\text{Var}[X]} = \sqrt{E[(x - \mu)^2]}.$$

Tolkning av standardavvik

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2]$$

$$\text{SD}[X] = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

- ★ Tolkning av standardavvik: Typisk avvik mellom X og μ



Forventningsverdi og stokastisk simulering

$$\text{Diskret: } \mu = E[X] = \sum_x xf(x)$$

$$\text{Kontinuerlig: } \mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2]$$

$$\text{SD}[X] = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

★ Hva dersom man ikke greier å regne ut summen/integralet?

★ Man kan regne ut en approksimasjon til $E[X]$ ved å benytte

- numerisk integrasjon
- stokastisk (Monte Carlo) simulering

★ Approksimasjon av $E[X]$ ved stokastisk simulering

- husk tolkning av forventningsverdi: gjennomsnitt av uendelig mange realisasjoner
- anta at vi kan generere uavhengige realisasjoner $x_1, x_2, \dots, x_n$ fra $f(x)$
- når n er stor (nok) har vi

$$E[X] \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- hvor stor må n være for å få en god (nok) approksimasjon?

★ Approksimasjon av $\text{Var}[X]$ ved stokastisk simulering

- anta at vi kan generere uavhengige realisasjoner $x_1, x_2, \dots, x_n$ fra $f(x)$
- når n er stor (nok) har vi

$$\text{Var}[X] \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- hvorfor skal vi diskutere senere i kurset

Oppsummering

- ★ Har definert begrepene
 - forventningsverdi, $\mu = \mu_X = E[X]$
 - varians, $\sigma^2 = \sigma_X^2 = \text{Var}[X]$
 - standardavvik, $\sigma = \sigma_X = \text{SD}[X]$
- ★ Har diskutert tolkning av forventningsverdi
 - gjennomsnitt når vi gjentar det stokastiske forsøket uendelig mange ganger
 - tyngdepunkt
- ★ Har diskutert tolkning av standardavvik
 - typisk avvik mellom X og μ
- ★ Har diskutert hvordan vi kan bruke stokastisk simulering til å approksimere
 - forventningsverdi
 - varians og standardavvik