Gamma- og kjikvadrat-fordeling

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Gammafordeling

Definisjon (Gammafordeling)

En kontinuerlig fordelt stokastisk variabel X sies å være gammafordelt med parametre $\alpha > 0$ og $\beta > 0$ dersom sannsynlighetstettheten er gitt ved

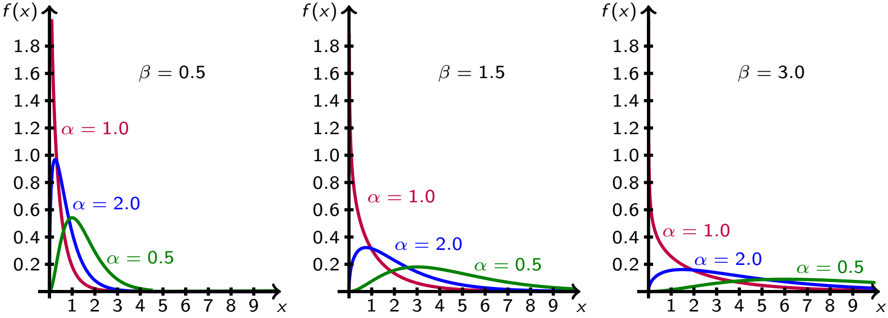
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & \textit{for } x \geq 0, \\ 0 & \textit{ellers,} \end{cases}$$

der $\Gamma(\cdot)$ er gammafunksjonen.

Teorem

La X være gammafordelt med parametre α og β. Da er

$$E[X] = \alpha\beta \quad \textit{og} \quad Var[X] = \alpha\beta^2.$$



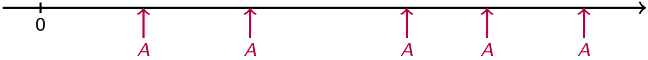
Poissonprosess og gammafordelingen

Gammafordeling: $f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, x \geq 0$

- ⋆ Merk: En gammafordeling med $\alpha = 1$ og $\beta = \frac{1}{\lambda}$ har

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^1 \Gamma(1)} x^{1-1} e^{-\frac{x}{1/\lambda}}$$
$$= \lambda e^{-\lambda x}$$

  - dvs en eksponensialfordeling med parameter λ
  - tid til første hendelse i en poissonprosess er gammafordelt med $\alpha = 1$ og $\beta = \frac{1}{\lambda}$



- ⋆ Dette resultatet kan generaliseres

Teorem

La $N(t); t \geq 0$ være en poissonprosess med intensitet λ, og la X være tidspunktet hvor hendelse nummer n i denne prosessen skjer. Da er X gammafordelt med parametre $\alpha = n$ og $\beta = \frac{1}{\lambda}$.

Kjikvadratfordeling

Gammafordeling: $f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, x \geq 0$
$E[X] = \alpha\beta, \quad \text{Var}[X] = \alpha\beta^2$

Definisjon (Kjikvadratfordeling)

La $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ være $\nu \in \{1, 2, \ldots\}$ uavhengige og standard normalfordelte variabler, og la

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2.$$

Da sier vi at X er kjikvadratfordelt (χ^2-fordelt) med ν frihetsgrader.

Teorem

La X være χ^2-fordelt med ν frihetsgrader. Da er sannsynlighetstettheten til X gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

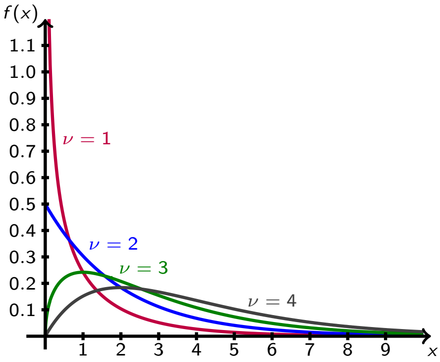
- Bevis kommer senere.
- Merk: En gammafordeling med $\alpha = \frac{\nu}{2}$ og $\beta = 2$ er en χ^2_ν-fordeling
- For en kjikvadratfordeling med ν frihetsgrader har vi at

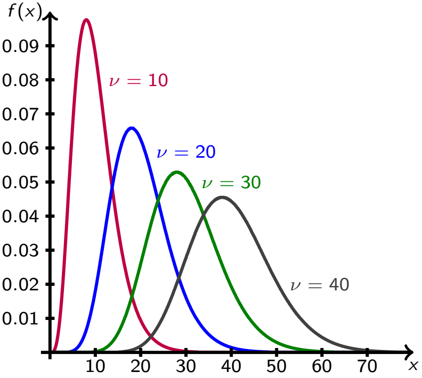
$$E[X] = \nu \quad \text{og} \quad \text{Var}[X] = 2\nu$$

Kjikvadratfordeling

- Sannsynlighetstetthet i kjikvadratfordeling

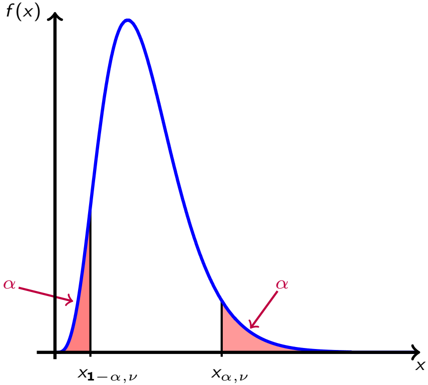
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$





Kvantiler i kjikvadratfordelingen

- ⋆ Finnes ikke analytisk uttrykk for kumulativ fordelingsfunksjon til kjikvadratfordeling
- ⋆ Ønsker å finne en verdi $x_{\alpha,\nu}$ slik at $P(X > x_{\alpha,\nu}) = \alpha$



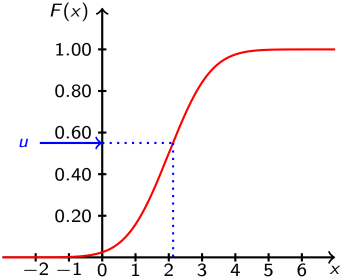
  - verdien $x_{\alpha,\nu}$ kan finnes i tabell
  - verdien $x_{\alpha,\nu}$ kan finnes ved å kalle en funksjon

- ⋆ Merk: $f(x)$ er IKKE symmtrisk

Simulering fra kjikvadratfordeling

- Har tidligere diskutert generell algoritme for å simulere fra en kontinuerlig fordeling

$$U \sim \text{Unif}[0,1]$$
$$X = F^{-1}(U)$$



- Kan simulere $X \sim \chi^2_\nu$ ut fra definisjonen

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_\nu^2$$

For $i = 1, 2, \ldots, \nu$
  Simuler $Z_i \sim N(0,1)$
End
Regn ut $X = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$

Oppsummering

- Har definert
  - gammafordeling
  - kjikvadratfordeling
- Har sett at
  - eksponensialfordeling er spesialtilfelle av gammafordeling
  - kjikvadratfordeling er spesialtilfelle av gammafordeling
  - sammenheng mellom poissonprosess og gammafordeling
- Har formler for
  - forventningsverdi
  - varians
- Har diskutert hvordan man i kjikvadratfordeling kan
  - finne kvantiler
  - simulere