

Hypotesetest og valg av antall observasjoner

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Hypotesetesting

- ★ To muligheter sannheter/hypoteser: H_0 og H_1
- ★ To mulige konklusjoner
 - forkast H_0 : observerte verdier gir grunnlag for å påstå at H_1 er sann
 - ikke forkaste H_0 : observerte verdier gir ikke grunnlag for å påstå at H_1 er sann
- ★ To type feil

	H_0 er sann	H_1 er sann
Forkast H_0	Type I-feil	Korrekt
Ikke forkast H_0	Korrekt	Type II-feil

- ★ Setter sannsynligheten for type I-feil lik signifikansnivået, α

$$P(\text{Type I-feil}) = P(\text{Forkast } H_0 | H_0 \text{ sann}) = \alpha$$

- ★ Sannsynligheten for type II-feil

$$P(\text{Type II-feil}) = P(\text{Ikke forkast } H_0 | H_1 \text{ sann}) = \beta$$

- ★ Til nå:
 - har antatt at vi allerede har gjort en del målinger/observasjoner
 - ønsker å bestemme om vi skal forkaste H_0 eller ikke (regne ut p-verdien)
- ★ Betrakt nå situasjonen:
 - har enda ikke gjort noen målinger/observasjoner
 - vi er med i planlegginga av forsøket
 - vi kan være på bestemme hvor mange målinger/observasjoner som skal gjøres
 - hvordan skal vi bestemme n , antall målinger/observasjoner?
- ★ Kan bestemme n slik at sannsynligheten for feil konklusjon er liten (nok)
 - sannsynligheten for type I-feil er α , uansett verdi av n
 - sannsynligheten for type II-feil, β , vil være en funksjon av n
 - en type II-feil er lite alvorlig dersom H_0 er nesten riktig
 - kan si at n skal velges slik at β er liten nok når H_0 er tilstrekkelig mye feil
- ★ På neste side: En matematisk formulering av en slik situasjon

Eksempel: Kriterium for valg av n

★ Situasjon:

- interessert i gjennomsnittlig systolisk blodtrykk blant kvinner med bestemt sykdom, μ
- ønsker å vite om μ er høyere enn $\mu_0 = 120$ mmHg
- måler blodtrykk hos n kvinner med denne sykdommen
- for måling i : anta $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, og $X_1, X_2, \dots, X_n$ uavhengige
- verdien til μ er ukjent, antar at verdien til σ^2 er kjent
- ønsker å avgjøre om det er grunnlag for å påstå at μ er større enn μ_0

★ Skal teste $H_0 : \mu = \mu_0$ mot $H_1 : \mu > \mu_0$

★ Testobservator

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}, \quad Z \sim N(0, 1) \text{ når } H_0 \text{ er sann}$$

★ Forkaster H_0 hvis $Z \geq z_\alpha$

★ Ut fra situasjonen vurderer vi

- alvorlig ikke å oppdage at H_0 er feil dersom $\mu \geq \mu_0 + \delta$
- krever at $\beta = P(\text{Type II-feil}) \leq \beta_0$ for alle $\mu \geq \mu_0 + \delta$

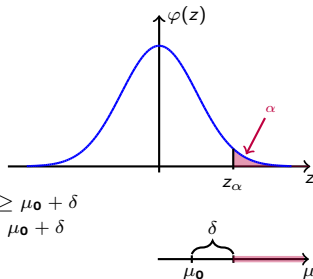
★ Krav: Velg n slik at

$$P(\text{Type II-feil}) = P(\text{Ikke forkast } H_0 | \mu) \leq \beta_0 \text{ for alle } \mu \geq \mu_0 + \delta$$

$$P(Z < z_\alpha | \mu) \leq \beta_0 \text{ for alle } \mu \geq \mu_0 + \delta$$

★ Merk: sannsynligheten $P(Z < z_\alpha | \mu)$ er en funksjon av n

★ På neste side: Løser ulikheten med hensyn på n



Utgregning av n

★ Kravet n må oppfylle er:

$$P(Z < z_\alpha | \mu) \leq \beta_0 \text{ for alle } \mu \geq \mu_0 + \delta$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < z_\alpha \middle| \mu\right) \leq \beta_0 \text{ for alle } \mu \geq \mu_0 + \delta$$

$$P\left(\bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \middle| \mu\right) \leq \beta_0 \text{ for alle } \mu \geq \mu_0 + \delta$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{\mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \middle| \mu\right) \leq \beta_0 \text{ for alle } \mu \geq \mu_0 + \delta$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{\mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} - (\mu_0 + \delta)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \middle| \mu\right) \leq \beta_0$$

$$\frac{z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq -z_{\beta_0} \Leftrightarrow (z_\alpha + z_{\beta_0}) \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \delta \Leftrightarrow (z_\alpha + z_{\beta_0})^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n} \leq \delta^2$$

$$\frac{(z_\alpha + z_{\beta_0})^2 \sigma^2}{\delta^2} \leq n \Leftrightarrow n \geq \frac{(z_\alpha + z_{\beta_0})^2 \sigma^2}{\delta^2}$$

Eksempel: $\alpha = 0.05, \beta_0 = 0.20, \delta = 0.02, \sigma^2 = 0.1^2 \Rightarrow n \geq \frac{(1.645 + 0.842)^2 \cdot 0.1^2}{0.02^2} = 154.6$
dvs. må ha minst $n = 155$ observasjoner

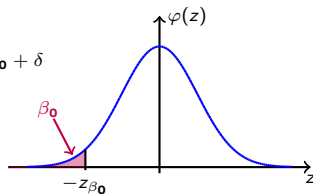
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$ uavhengige

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1) \text{ alltid}$$

Testobservator:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1) \text{ når } H_0 \text{ er sann}$$



Oppsummering

- ★ Har formulert krav på antall observasjoner
 - ved å kreve at sannsynligheten for type II-feil skal være lav nok
 - når avvik fra H_0 er tilstrekkelig stor
- ★ Har i et eksempel sett hvordan vi fra kravet
 - kan finne krav på antall observasjoner n
- ★ Alternativ formulering
 - kreve at teststyrken er stor nok
 - når avvik fra H_0 er tilstrekkelig stor