

Kombinatorikk

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

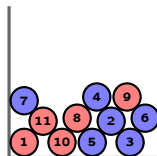
Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Unif. sanns.modell: $P(A) = \frac{g}{m}$

★ Skal se på telleregler for fem situasjoner

- multiplikasjonssetningen
- urnemodell: ordnet utvalg, trekker med tilbakelegging
- urnemodell: ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging
- urnemodell: ikke-ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging
- inndeling i grupper



★ Multiplikasjonssetningen:

- Situasjon: Anta at en operasjon kan utføres på n_1 måter, og for hver av disse kan en annen operasjon utføres på n_2 måter, og for hver kombinasjon av disse kan en tredje operasjon utføres på n_3 måter, og så videre opp til at for hver kombinasjon av de $k - 1$ første operasjonene kan en k -te operasjon utføres på n_k måter.
- På hvor mange måter kan de k operasjonene kombineres?
- Resultat: Da kan de k operasjonene kombineres på

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

måter.

Urnemodell: ordnet utvalg, trekker med tilbakelegging

Unif. sanns.modell: $P(A) = \frac{g}{m}$

★ Situasjon:

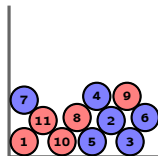
- har n kuler i urna
- trekker r kuler med tilbakelegging
- ordnet utvalg

★ Spørsmål: På hvor mange måter kan de r kulene trekkes?

★ Svar: Kulene kan trekkes på

$$n^r$$

måter



★ Eksempel: Urne med 11 kuler, 5 røde kuler og 6 blå kuler. Trekker 4 kuler med tilbakelegging. Hva er sannsynligheten for at kule nummer 1, 3 og 4 er røde?

- $m = 11^4 = 14641$
- $g = 6 \cdot 5^3 = 750$
- $P(A) = \frac{750}{14641} = 0.1512$

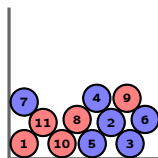
Urnemodell: ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging

Unif. sanns.modell: $P(A) = \frac{g}{m}$

★ Situasjon:

- har n kuler i urna
- trekker r kuler uten tilbakelegging
- ordnet utvalg

★ Spørsmål: På hvor mange måter kan de r kulene trekkes?



★ Svar: Kulene kan trekkes på

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot \dots \cdot 1}{(n-r) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}_n P_r$$

måter

★ Eksempel: Urne med 11 kuler, 5 røde kuler og 6 blå kuler. Trekker 4 kuler uten tilbakelegging. Hva er sannsynligheten for at kule nummer 1, 3 og 4 er røde?

- $m = {}_{11}P_4 = \frac{11!}{(11-4)!} = 7920$
- $g = 6 \cdot {}_5P_3 = 6 \cdot \frac{5!}{(5-3)!} = 360$
- $P(A) = \frac{360}{7920} = 0.04545$

Urnemodell: ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging

Unif. sanns.modell: $P(A) = \frac{g}{m}$

★ Situasjon:

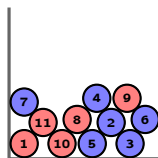
- har n kuler i urna
- trekker r kuler uten tilbakelegging
- ordnet utvalg

★ Spørsmål: På hvor mange måter kan de r kulene trekkes?

★ Svar: Kulene kan trekkes på

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot \dots \cdot 1}{(n-r) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}_n P_r$$

måter



Definisjon (Permutasjon)

En permutasjon er et r -tupel fra en mengde av n elementer der intet element opptrer mer enn en gang.

★ Eksempel: Fra mengden $\{1, 2, 3\}$ finnes følgende 2-tupler:

$(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$

★ Resultat: Antall mulige permutasjoner av r elementer trukket fra n er

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \text{Spesielt : } {}_n P_n = n!$$

Urnemodell: ikke-ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging

★ Situasjon:

- har n kuler i urna
- trekker r kuler uten tilbakelegging
- ikke-ordnet utvalg

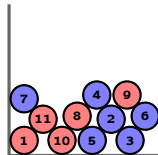
Unif. sanns.modell: $P(A) = \frac{g}{m}$

★ Spørsmål: På hvor mange måter kan de r kulene trekkes?

★ Svar: Kulene kan trekkes på

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

måter



★ Bevis: Vi vet at antall ordnede utvalg er

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

En alternativ formel for antall ordnede utvalg får vi ved å se på antall kombinasjoner av to operasjoner. Først trekker vi det ikke-ordnede utvalget av r kuler, og deretter trekker vi rekkefølgen på de r kulene. La v betegne antall ikke-ordnede utvalg (det er dette tallet vi ønsker å finne). For hver av de v mulige trekningene vi kan gjøre uten å registrere rekkefølgen har vi ${}_rP_r = r!$ mulige rekkefølger av de r kulene vi har trukket ut. Multiplikasjonssetningen gir da at antall ordnede utvalg må være

$$v \cdot r!$$

Ved å sette de to uttrykkene for antall ordnede utvalg lik hverandre får vi

$$\frac{n!}{(n-r)!} = v \cdot r! \quad \Rightarrow \quad v = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Urnemodell: ikke-ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging

★ Situasjon:

- har n kuler i urna
- trekker r kuler uten tilbakelegging
- ikke-ordnet utvalg

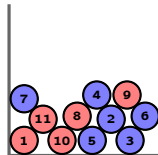
Unif. sanns.modell: $P(A) = \frac{g}{m}$

★ Spørsmål: På hvor mange måter kan de r kulene trekkes?

★ Svar: Kulene kan trekkes på

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

måter



★ Eksempel: Urne med 11 kuler, 5 røde kuler og 6 blå kuler. Trekker 4 kuler uten tilbakelegging. Hva er sannsynligheten for å trekke nøyaktig 3 røde kuler?

- $m = \binom{11}{4} = 330$
- $g = \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{1} = 60$
- $P(A) = \frac{60}{330} = 0.1818$

Inndeling i grupper

Unif. sanns.modell: $P(A) = \frac{g}{m}$

★ Situasjon:

- har n elementer
- skal dele (alle) elementene inn i r (identifiserbare) grupper
- n_1 elementer i gruppe 1, n_2 elementer i grupper 2, $\dots$, n_r elementer i gruppe r
- $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

★ Spørsmål: På hvor mange måter kan de n elementene deles inn i slike grupper?

★ Svar: De n elementene kan deles inn slike grupper på

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

måter

★ Eksempel: Har vanlig kortstokk med 52 kort. Spiller A og spiller B får 5 kort hver. Hva er sannsynligheten for at både spiller A og spiller B får nøyaktig 3 billedkort (knekt, dame, konge, ess)?

- $m = \binom{52}{5, 5, 42} = \frac{52!}{5! \cdot 5! \cdot 42!} = 3\,986\,646\,103\,440$
- $g = \binom{16}{3, 3, 10} \cdot \binom{36}{2, 2, 32} = 56\,605\,348\,800$
- $P(A) = \frac{56\,605\,348\,800}{3\,986\,646\,103\,440} = 0.01420$

Oppsummering

- ★ Har sett på fem telleregler

- Multiplikasjonssetningen

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

- Urnemodell: ordnet utvalg, trekker med tilbakelegging

$$n^r$$

- Urnemodell: ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Urnemodell: ikke-ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

- Inndeling i grupper

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

- ★ Enkle eksempler på bruk

- ★ Må typisk kombinere multiplikasjonssetningen med en eller flere av de andre reglene