Momenter og momentgenererende funksjoner

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Momenter og momentgenererende funksjoner

Definisjon (r-te ordens moment)

La X være en stokastisk variabel. Da er r-te ordens moment til X gitt som

$$\mu_r = E[X^r]$$

for $r \in \{1, 2, \ldots\}$.

- Merk:
  - $\mu_1 = E[X] = \mu$
  - siden $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$ har vi at $\mu_2 = E[X^2] = \sigma^2 - \mu_1^2$

Definisjon (Momentgenererende funksjon)

Momentgenererende funksjon til en stokastisk variabel X er

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

Teorem

La X være en stokastisk variabel med momentgenererende funksjon $M_X(t)$. For $r \in \{1, 2, \ldots\}$ har vi da at

$$M_X^{(r)}(0) = E[X^r] = \mu_r$$

Momenter og momentgenererende funksjoner

$M_X(t) = E[e^{tX}]$

Teorem

La X være en stokastisk variabel med momentgenererende funksjon $M_X(t)$. For $r \in \{1, 2, \ldots\}$ har vi da at

$$M_X^{(r)}(0) = E[X^r] = \mu_r$$

Bevis (for kontinuerlig stokastisk variabel)

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x)dx$$

$$M_X'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = E[X]$$

$$M_X''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} f(x)dx$$

$$M_X''(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = E[X^2]$$

$$M_X^{(r)}(t) = \frac{d^r}{dt^r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{dt^r} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x)dx$$

$$M_X^{(r)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx = E[X^r]$$

Regneregler for momentgenererende funksjoner

$M_X(t) = E[e^{tX}]$

Teorem

La X være en stokastisk variabel og la a være en konstant. Da har vi at

- $\star$ $M_{X+a}(t) = e^{at}M_X(t)$,
- $\star$ $M_{aX}(t) = M_X(at)$.

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige stokastiske variabler. Da har vi at

- $\star$ $M_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$.

Bevis

$$
\begin{aligned}
M_{X+a}(t) &= E[e^{t(X+a)}] = E[e^{tX+ta}] = E[e^{tX} \cdot e^{ta}] = e^{at}E[e^{tX}] = e^{at}M_X(t) \\
M_{aX}(t) &= E[e^{t(aX)}] = E[e^{(at)X}] = M_X(at) \\
M_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) &= E[e^{t(X_1+X_2+\ldots+X_n)}] \\
&= E[e^{tX_1+tX_2+\ldots+tX_n}] \\
&= E[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \cdot \ldots \cdot e^{tX_n}] \\
&= E[e^{tX_1}] \cdot E[e^{tX_2}] \cdot \ldots \cdot E[e^{tX_n}] \\
&= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)
\end{aligned}
$$

Momentgenererende funksjon for en normalfordeling

$M_X(t) = E[e^{tX}]$

Sannsynlighetstthet for normalfordeling:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$

$M_{aX}(t) = M_X(at)$

$M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$

- La $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Finner først momentgenererende funksjon for $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) = E[e^{tZ}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2tz\right)\right\} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2tz + t^2\right) + \frac{t^2}{2}\right\} dz \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz = e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}
$$

- Merk: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow X = \mu + \sigma Z$

$$M_{\sigma Z}(t) = M_Z(\sigma t) = e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}}$$

$$M_X(t) = M_{\mu+\sigma Z}(t) = e^{\mu t} M_{\sigma Z}(t) = e^{\mu t} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$$

Momentgenererende funksjon for å beskrive en sannsynlighetsfordeling

Teorem

La X og Y være to stokastiske variabler med momentgenererende funksjoner henholdsvis $M_X(t)$ og $M_Y(t)$. Dersom

$$M_X(t) = M_Y(t)$$

for alle t er også fordelingene til X og Y identiske.

- Ofte enklere å vise at $M_X(t)$ og $M_Y(t)$ er like enn å vise at $f_X(x)$ og $f_Y(y)$ er like

- I annen video: Dette kan brukes til å vise
  - egenskaper til fordelinger
  - sammenhenger mellom fordelinger

Oppsummering

- ⋆ Har definert begrepene
  - momenter, $\mu_r = E[X^r]$
  - momentgenererende funksjon, $M_X(t) = E[e^{tX}]$

- ⋆ Har sett på egenskaper til momentgenererende funksjoner
  - $M_X^{(r)}(0) = E[X^r]$
  - $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$
  - $M_{aX}(t) = M_X(at)$
  - hvis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige har vi at

    $$M_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$$

- ⋆ Har kort nevnt at
  - teorem: hvis $M_X(t) = M_Y(t)$ har X og Y samme sannsynlighetsfordeling
  - mer om dette i annen video