Noen flere regneregler for forventningsverdi og varians

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Varians uttrykt ved forventningsverdier

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2]$$

Teorem

La X være en stokastisk variabel. Da har vi at

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Bevis

Starter med definisjonen av varians. Skriver som vanlig $\mu = E[X]$.

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E\left[(X - \mu)^2\right] \\
&= E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right] \\
&= E[X^2] + E[-2\mu X] + E[\mu^2] \\
&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\
&= E[X^2] - 2E[X] \cdot E[X] + E[X]^2 \\
&= E[X^2] - E[X]^2
\end{aligned}$$

Teorem

La X og Y være stokastiske variabler. Da har vi at

$$Cov[X, Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

Forventingsverdi til produkt av uavhengige stokastiske variabler

Kontinuerlig: $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)dx$

X og Y uavhengige: $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$

Teorem

La X og Y være uavhengige stokastiske variabler. Da har vi at

$$E[X\cdot Y] = E[X]\cdot E[Y].$$

Bevis (når X og Y er kontinuerlige SV))

$$\begin{aligned}
E[X\cdot Y] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)dx\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y)dx\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[y f_Y(y)\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx\right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[y f_Y(y) E[X]\right] dy \\
&= E[X]\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
&= E[X]\cdot E[Y]
\end{aligned}$$

Forventingsverdi til produkt av uavhengige stokastiske variabler

Kontinuerlig: $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)dx$

X og Y uavhengige: $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\text{Cov}[X,Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$

Teorem

La X og Y være uavhengige stokastiske variabler. Da har vi at

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y].$$

Teorem

La X og Y være uavhengige stokastiske variabler. Da har vi at

$$Cov[X,Y] = 0.$$

Bevis

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] \\ &= E[X] \cdot E[Y] - E[X] \cdot E[Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Oppsummering

- Har innført regnereglene

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
$$\text{Cov}[X, Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

- Dersom X og Y er uavhengige har vi vist at

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$
$$\text{Cov}[X, Y] = 0$$