

Observator, estimator og evaluering av estimatorer

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Observator og estimator

- ★ Situasjon: Er interessert i en populasjon. Har observert verdier for et utvalg. Ønsker å si noe om hele populasjonen

Definisjon (Observator)

En observator er en observerbar funksjon av en eller flere stokastiske variabler som utgjør et utvalg

- ★ Eksempler på observatorer

- gjennomsnitt: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- median: $\tilde{X}$

- empirisk varians: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

- empirisk standardavvik: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

- ★ Merk: Observatorer er stokastiske variabler

- har en sannsynlighetsfordeling
- har en forventningsverdi
- har en varians

Definisjon (Estimator)

Anta at vi har uavhengige stokastiske variabler $X_1, X_2, \dots, X_n$, der $X_i \sim f_{X_i}(x_i; \theta)$ for $i = 1, 2, \dots, n$ og verdien til parameteren θ er ukjent. En estimator for θ er da en observator som benyttes til å anslå verdien til θ .

Eksempler på estimatorer

Estimator: Anta at vi har uavhengige stokastiske variabler $X_1, X_2, \dots, X_n$, der $X_i \sim f_{X_i}(x_i; \theta)$ for $i = 1, 2, \dots, n$ og verdien til parameteren θ er ukjent. En estimator for θ er da en observator som benyttes til å anslå verdien til θ .

- ★ Anta situasjon: Er interessert i andelen defekte artikler i et vareparti. Undersøker n tilfeldig valgte artikler. Lar X være antall av de n som er defekte. Vet da at $X \sim \text{binomisk}(n, p)$. Verdien til parameteren p er ukjent. Ønsker å bruke X til å anslå/estimere verdien til p .

- estimator: $\hat{p} = \frac{X}{n}$

- ★ Anta situasjon: Er interessert i en fysisk størrelse μ . Gjør n målinger av μ , MEN med målefeil. For måling i , anta $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, og at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige. Verdien til μ er ukjent. Ønsker å bruke $X_1, X_2, \dots, X_n$ til å anslå/estimere verdien til μ .

- estimator: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- estimator: $\mu^* = \tilde{X}$

- ★ Merk notasjon:

- estimator for θ betegner vi med $\hat{\theta}$, eventuelt θ^* , $\tilde{\theta}$ eller $\hat{\hat{\theta}}$
- fra observerte verdier $x_1, x_2, \dots, x_n$ kan vi regne ut tilhørende tallverdi (estimat) for $\hat{\theta}$

- ★ Hvilken estimator er best?

- hva er en god estimator?

Evaluering av estimatorer

- ★ Hva er en god estimator?
- ★ Ønsker at $\hat{\theta}$ skal være nær θ
 - men verdien til θ er ukjent så vi kan ikke sammenligne $\hat{\theta}$ med verdien til θ
- ★ Må tenke oss at vi gjentar det stokastiske forsøket uendelig mange ganger
 - så vi får uendelig mange estimat $\hat{\theta}$ for θ
- ★ Naturlig å kreve at estimatene stort sett ligger nær den sanne verdien θ
 - spesielt: gjennomsnittet av de uendelig mange estimatene bør være lik sann verdi θ
 - og: variasjonen rundt dette gjennomsnittet bør være minst mulig

Definisjon (Forventningsrett)

En estimator $\hat{\theta}$ sies å være en forventningsrett estimator for en parameter θ hvis

$$E[\hat{\theta}] = \theta.$$

Hvis dette ikke er oppfylt sies $\hat{\theta}$ å være en forventningsskjev estimator for θ .

Definisjon (Mest effisient estimator)

Av flere forventningsrette estimatore for en parameter θ sier vi at den med minst varians er mest effisient.

- ★ Dermed: En god estimator skal
 - være forventningsrett
 - være mest effisient

Eksempel: Hvilken estimator er best?

- ★ Anta situasjon: Er interessert i en fysisk størrelse μ . Gjør n målinger av μ , MEN med målefeil. For måling i , anta $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, og at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige. Verdien til μ er ukjent. Ønsker å bruke $X_1, X_2, \dots, X_n$ til å anslå/estimere verdien til μ .

- estimator: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- estimator: $\mu^* = \tilde{X}$

- ★ Spørsmål: Hvilken av disse to estimatorene er best?

- ★ Sjekker om de er forventningsrette:

$$E[\hat{\mu}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

$$E[\mu^*] = \text{vanskelig utregning} = \mu$$

- ★ Sjekker hvilken som er mest effisient

$$\text{Var}[\hat{\mu}] = \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\text{Var}[\mu^*] = \text{vanskelig utregning} > \frac{\sigma^2}{n} \text{ for } n > 2$$

- ★ Konklusjon: foretrekker estimatoren $\hat{\mu}$

- ★ Neste side: Illustrasjon av dette resultatet ved hjelp av stokastisk simulering

Illustrasjon ved stokastisk simulering

- ★ Anta situasjon: Er interessert i en fysisk størrelse μ . Gjør n målinger av μ , MEN med målefeil. For måling i , anta $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, og at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige. Verdien til μ er ukjent. Ønsker å bruke $X_1, X_2, \dots, X_n$ til å anslå/estimere verdien til μ .

- estimator: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- estimator: $\mu^* = \tilde{X}$

- ★ Bruk $n = 9$, $\mu = 2.4$, $\sigma^2 = 0.1^2$

- ★ Simulerer observasjoner: 2.480, 2.262, 2.560, 2.281, 2.503, 2.362, 2.258, 2.282, 2.456

- dette gir $\hat{\mu} = 2.383$ og $\mu^* = 2.362$



Illustrasjon ved stokastisk simulering

- ★ Anta situasjon: Er interessert i en fysisk størrelse μ . Gjør n målinger av μ , MEN med målefeil. For måling i , anta $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, og at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige. Verdien til μ er ukjent. Ønsker å bruke $X_1, X_2, \dots, X_n$ til å anslå/estimere verdien til μ .

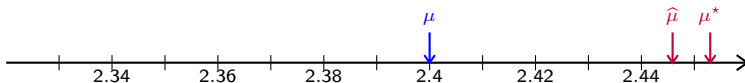
- estimator: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- estimator: $\mu^* = \tilde{X}$

- ★ Bruk $n = 9$, $\mu = 2.4$, $\sigma^2 = 0.1^2$

- ★ Simulerer nye observasjoner: 2.482, 2.407, 2.415, 2.406, 2.480, 2.453, 2.512, 2.331, 2.527

- dette gir $\hat{\mu} = 2.446$ og $\mu^* = 2.453$



Illustrasjon ved stokastisk simulering

- ★ Anta situasjon: Er interessert i en fysisk størrelse μ . Gjør n målinger av μ , MEN med målefeil. For måling i , anta $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, og at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige. Verdien til μ er ukjent. Ønsker å bruke $X_1, X_2, \dots, X_n$ til å anslå/estimere verdien til μ .

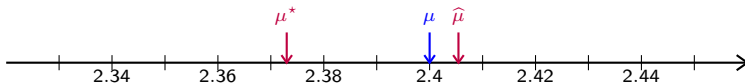
- estimator: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- estimator: $\mu^* = \tilde{X}$

- ★ Bruk $n = 9$, $\mu = 2.4$, $\sigma^2 = 0.1^2$

- ★ Simulerer nye observasjoner: 2.464, 2.277, 2.547, 2.393, 2.373, 2.369, 2.321, 2.369, 2.536

- dette gir $\hat{\mu} = 2.405$ og $\mu^* = 2.373$



Illustrasjon ved stokastisk simulering

- ★ Anta situasjon: Er interessert i en fysisk størrelse μ . Gjør n målinger av μ , MEN med målefeil. For måling i , anta $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, og at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige. Verdien til μ er ukjent. Ønsker å bruke $X_1, X_2, \dots, X_n$ til å anslå/estimere verdien til μ .

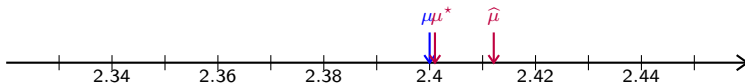
- estimator: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- estimator: $\mu^* = \tilde{X}$

- ★ Bruk $n = 9$, $\mu = 2.4$, $\sigma^2 = 0.1^2$

- ★ Simulerer nye observasjoner: 2.544, 2.401, 2.465, 2.430, 2.389, 2.461, 2.330, 2.325, 2.364

- dette gir $\hat{\mu} = 2.412$ og $\mu^* = 2.401$



Illustrasjon ved stokastisk simulering

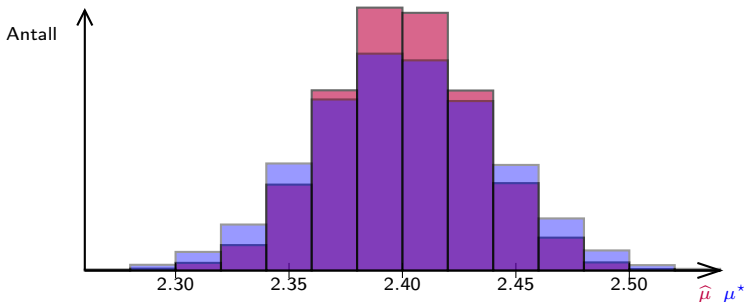
- ★ Anta situasjon: Er interessert i en fysisk størrelse μ . Gjør n målinger av μ , MEN med målefeil. For måling i , anta $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, og at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige. Verdien til μ er ukjent. Ønsker å bruke $X_1, X_2, \dots, X_n$ til å anslå/estimere verdien til μ .

- estimator: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- estimator: $\mu^* = \tilde{X}$

- ★ Bruk $n = 9$, $\mu = 2.4$, $\sigma^2 = 0.1^2$

- ★ Gjentar forsøket 10 000 ganger
 - lager histogram over de 10 000 verdiene av $\hat{\mu}$ og μ^*



Oppsummering

- ★ Har definert begrepene
 - observator
 - estimator
- ★ Har diskutert hva vi skal kreve av en god estimator
 - forventningsrett
 - mest effisient