Poissonfordeling som tilærming til binomisk fordeling

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

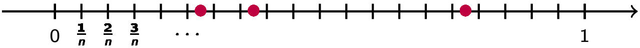
Binomisk fordeling og poissonfordeling

- I en Bernoulli forsøksrekke gjentas et forsøk n ganger
  - forsøket har to mulige utfall, «suksess» og «fiasko»
  - utfallet av forsøkene er uavhengige
  - sannsynligheten for suksess er lik (p) i alle forsøkene

- I en poissonprosess med intensitet λ
  1. $N(0) = 0$
  2. For $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ er $N(t_2) - N(t_1)$ og $N(t_4) - N(t_3)$ uavhengige
  3. For $t \geq 0$ og $\Delta t > 0$ har vi at

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$
$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$$

- Anta X binomisk fordelt, n er stor, p er liten



  - del intervallet $[0, 1]$ inn i n små intervall
  - hvis suksess på forsøk nummer i, plasser en hendelser i intervall nummer i
  - hendelsene i intervallet $[0, 1]$ vil da tilnærmet oppfylle antagelsene i en poissonprosess med $\lambda \cdot \frac{1}{n} = p$

- Når n er stor og p er liten vil vi derfor forvente at en binomisk fordeling med parametre n og p er tilnærmet lik en poissonfordeling med parameter $\lambda = np$

Poissonfordeling som tilnærming til binomisk fordeling

Teorem (Poissonfordeling som tilnærming til binomisk fordeling)

Anta at X er binomisk fordelt med parametre n og p, slik at punktsannsynligheten til X er gitt ved

$$f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

I grensen når $n \to \infty$ og $p \to 0$ på en slik måte at $\lambda = np$ holdes konstant har man da for hver $x = 0, 1, 2, \ldots$ at

$$\lim_{\substack{n \to \infty, p \to 0 \\ np = \lambda}} f(x; n, p) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

- Bevis senere
  - momentgenerende funksjoner

- Dermed: Hvis n er stor og p liten, kan man med god approksimasjon regne på poissonfordeling i stedet for en binomisk fordeling

- Eksempel: $n = 100$, $p = 0.01$, $\lambda = np = 1$. Da er $P(X = x)$

x	0	1	2	3	4	5	6
binomisk	0.3660	0.3697	0.1849	0.0610	0.0149	0.0029	0.0005
Poisson	0.3679	0.3679	0.1839	0.0613	0.0153	0.0031	0.0005

Oppsummering

* Binomisk fordeling er tilnærmet lik en poissonfordeling når n er stor og p er liten
* Har
  - diskutert intuisjon
  - formulert som teorem
  - bevis kommer senere