Poissonprosess og poissonfordeling

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

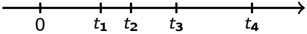
Poissonprosess

- ⋆ I et poissoneksperiment teller man antall hendelser (av en type) i et tidsintervall av lengde t

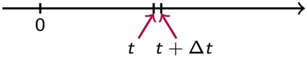
- ⋆ Eksempler
  - meldinger som ankommer en (bestemt) basestasjon
  - trykkfeil i et manuskript
  - kunder som ankommer en (bestemt) butikk

Definisjon (Poissonprosess)

En prosess $\{N(t); t \geq 0\}$ kalles in poissonprosess med intensitet λ hvis følgende krav er oppfylt



1. $N(0) = 0$.
2. *For* $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ *er* $N(t_2) - N(t_1)$ *og* $N(t_4) - N(t_3)$ *uavhengige.*
3. *For* $t \geq 0$ *og* $\Delta t > 0$ *har vi at*



$$P(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$
$$P(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t),$$

der hver $o(\Delta t)$ *angir en funksjon som oppfyller*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Poissonfordeling

Definisjon (Poissonfordeling)

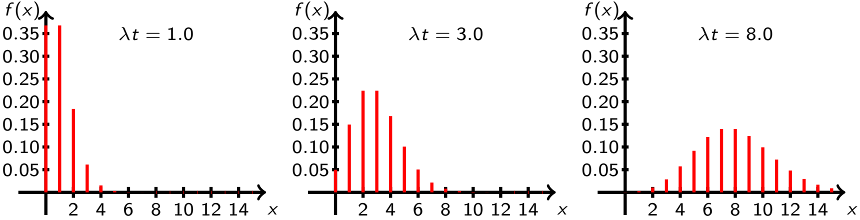
La $N(t)$ være en poissonprosess med intensitet λ. Fikser en verdi $t > 0$ og la $X = N(t)$. Vi sier da at X er poissonfordelt med parameter λt.

Teorem (Punktsannsynlighet i poissonfordeling)

La X være poissonfordelt med parameter λt. Da er punktsannsynligheten til X gitt ved

$$f(x) = P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } x = 0, 1, 2, \ldots$$

- ⋆ Bevis ikke pensum:
  - induksjon
  - differensialligninger



Forventningsverdi og varians i poissonfordeling

Poissonfordeling: $f(x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$
Forventningsverdi: $E[X] = \sum_x x\, f(x)$

Teorem (Forventningsverdi og varians i poissonfordeling)

La X være poissonfordelt med parameter λt. Da er

$$E[X] = \lambda t \quad \textit{og} \quad Var[X] = \lambda t.$$

Bevis (for forventningsverdi)

Starter med definisjon av forventningsverdi

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=\mathbf{0}}^{\infty} x\, f(x) \\
&= \sum_{x=\mathbf{0}}^{\infty} x \cdot \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \\
&= \sum_{x=\mathbf{1}}^{\infty} x \cdot \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \\
&= \lambda t \cdot \sum_{x=\mathbf{1}}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{x-\mathbf{1}}}{(x-1)!} e^{-\lambda t} \\
&= \lambda t \cdot \sum_{z=\mathbf{0}}^{\infty} \frac{(\lambda t)^z}{z!} e^{-\lambda t} \\
&= \lambda t
\end{aligned}$$

Substitusjon:
$z = x - 1 \Leftrightarrow x = z + 1$

Kumulativ fordeling og kvantiler for poissonfordeling

- Punktsannsynlighet

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, x = 0, 1, 2, \ldots$$

- Kumulativ fordelingsfunksjon for $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{u=0}^{x} f_X(u) = \sum_{u=0}^{x} \frac{(\lambda t)^u}{u!} e^{-\lambda t}$$

  - for de fleste verdier av λt har vi intet analytisk uttrykk for summen

- For å finne en sannsynlighet $P(X \leq x)$ for gitte verdier av λt og x kan man
  - numerisk regne ut summen
  - kalle en funksjon som gir verdien
  - slå opp verdien i en tabell

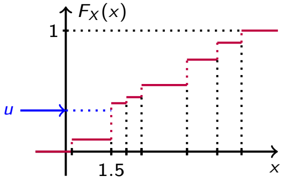
- For å finne en kvantil $x = \min\{x : F_X(x) \geq q\}$ for gitte verdier av λt og q kan man
  - regne den ut numerisk
  - kalle en funksjon som gir verdien
  - lete seg frem i en tabell over $P(X \leq x)$

Simulering fra poissonfordeling

- Har tidligere diskutert generell algoritme for å simulere fra en diskret fordeling

$U \sim \text{Unif}[0,1]$

$X = \min\{x : F_x(x) \geq U\}$



- Alternativ: Simulere avstand mellom etterfølegende hendelser i poissonprosess

Initier $X = 0$
Simuler $T \sim f_T(t)$
Initier sumT $= T$
While (sumT $< t$)
  Simuler $T \sim f_T(t)$
  Regn ut sumT $=$ sumT $+ T$
  Regn ut $X = X + 1$
End
Returner X

Oppsummering

- Har definert poissonprosess og poissonfordeling
- Har
  - fått oppgitt punktsannsynlighet, $f(x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, x = 0, 1, 2, \ldots$
  - utledet forventningsverdi, $E[X] = \lambda t$
  - fåt oppgitt varians, $\text{Var}[X] = \lambda t$
- Har diskutert hvordan man kan
  - finne sannsynligheter $P(X \leq x)$
  - finne kvantiler, $x = \min\{F(x) \geq q\}$
  - simulere en realisasjon ved å simulere en poissonprosess
- Poissonprosess og poissonfordeling er oppkalt etter baron Siméon Denis Poisson (1781-1840): fransk matematiker, statistiker og fysiker